Baccalauréat STL 2016

L'intégrale de juin à septembre 2014

∽ Baccalauréat STL Biotechnologies 19 juin 2014 Polynésie ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} *près.*

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes à essais destinés à des laboratoires.
L'objectif de l'exercice est d'analyser la qualité de la production.

Partie A

La direction de l'entreprise affirme que la probabilité qu'un tube à essais ait un défaut est égale à 0,04.
On prélève au hasard 100 tubes à essais dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 tubes à essais, associe le nombre de tubes à essais présentant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « Le prélèvement contient exactement 5 tubes à essais présentant un défaut ».
3. Déterminer la probabilité de l'évènement B : « Le prélèvement contient au plus 2 tubes à essais présentant un défaut ».

Partie B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à un tube à essais prélevé au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètres. Le service qualité de l'entreprise estime que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $19,9$ et d'écart type $0,25$.

1. Déterminer la probabilité qu'un tube à essais ait un diamètre compris entre 19,5 mm et 20,5 mm.
2. Déterminer la probabilité qu'un tube à essais ait un diamètre supérieur ou égal à 20 mm.

Partie C

Le réglage d'une machine de production est tel que 3 % des tubes à essais fabriqués ont une épaisseur non conforme.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes essais d'épaisseur non conforme dans un échantillon de 200 tubes à essais.
2. On prélève un échantillon de 200 tubes à essais. On constate que dans cet échantillon 12 tubes à essais ont une épaisseur non conforme. Ce constat remet-il en question le réglage de la machine de production ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans un lac de montagne, on a observé qu'une population de poissons diminuait de 6 % tous les ans en raison d'une modification écologique du lac.
On s'intéresse au nombre de poissons, n années après la première observation effectuée en 2004, où l'on comptait 3 500 poissons.
La situation peut être modélisée par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 3500$, u_n fournissant une estimation du nombre de poissons l'année $2004 + n$.

1. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. On propose l'algorithme suivant :

Variables :	U, N
Initialisation :	U prend la valeur 3 500
	N prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $U > 2500$
	U prend la valeur $U \times 0,94$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin du tant que
Sortie	
Afficher N	

   Déterminer la valeur de N obtenue en faisant fonctionner l'algorithme et interpréter le résultat.
3. En 2010, une association s'est mobilisée pour améliorer les conditions écologiques du lac. Depuis, la population de poissons a augmenté de 4 % chaque année.
   En 2010, l'association a constaté que le lac contenait 2 400 poissons.
   a. Déterminer le nombre de poissons présents en 2014.
   b. Si cette augmentation se maintient au même rythme, en quelle année la population de poissons observée retrouvera-t-elle la valeur de l'année 2004 ?

EXERCICE 3 **5 points**

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries dans une gélose nutritive non renouvelée.

Partie A

On admet que le nombre de bactéries en fonction du temps est donnée à l'instant t (exprimé en heures) par $N(t)$ où N, fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,92y$.
Le nombre de bactéries à l'instant initial est égal à 525.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la fonction N, solution de l'équation différentielle (E) sur $[0\,,\,+\infty[$, qui vérifie la condition $N(0) = 525$.

Partie B

On admet que la fonction N est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$N(t) = 525\mathrm{e}^{-0,92t}$$

et on note $\mathcal{C}_N$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction N en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on donner de cette limite ?
2. Calculer $N'(t)$ où N' désigne la fonction dérivée de N.
3. $N'(t)$ représente la vitesse instantanée de l'évolution du nombre des bactéries à l'instant t ; cette vitesse est exprimée en nombre de bactéries par heure.
   Déterminer la vitesse instantanée pour $t = 0$ puis pour $t = 3$.
4. Au bout de combien de temps la vitesse instantanée est-elle égale à la moitié de celle à l'instant $t = 0$?

EXERCICE 4 **6 points**

Le but de cet exercice est de comparer les résultats, obtenus par expérience et selon un modèle théorique, d'un titrage d'une solution d'hydroxyde de sodium (NaOH) par une solution d'acide chlorhydrique (HCl).

Partie A : Expérience et approximation affine

Lors d'une expérience, on obtient les mesures suivantes :

Numéro de la mesure	1	2	3	4	5	6
Volume en ml d'acide versé : x_i	0	10	20	40	50	60
pH : y_i	11,80	11,68	11,52	11,32	11,22	11,08

1. Sur l'annexe page 5, représenter le nuage de points M_i $(x_i\ ;\ y_i)$.
2. **a.** À l'aide d'une calculatrice, donner une équation de la droite D d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 10^{-4} près).
   b. En utilisant l'ajustement réalisé à la question précédente, déterminer le pH du mélange après versement de 35 ml d'acide chlorhydrique.

Partie B : Modèle théorique

Pour un volume x (en ml) d'acide chlorhydrique ajouté, compris entre 0 et 150, le pH de la solution est égal à $f(x)$ où f est la fonction définie sur $[0\ ,\ 150]$ par :

$$f(x) = 3,8 - 0,01x + \frac{8}{1 + \mathrm{e}^{0,2x-16}}$$

La fonction f' désigne la fonction dérivée de f sur $[0 ; 150]$.

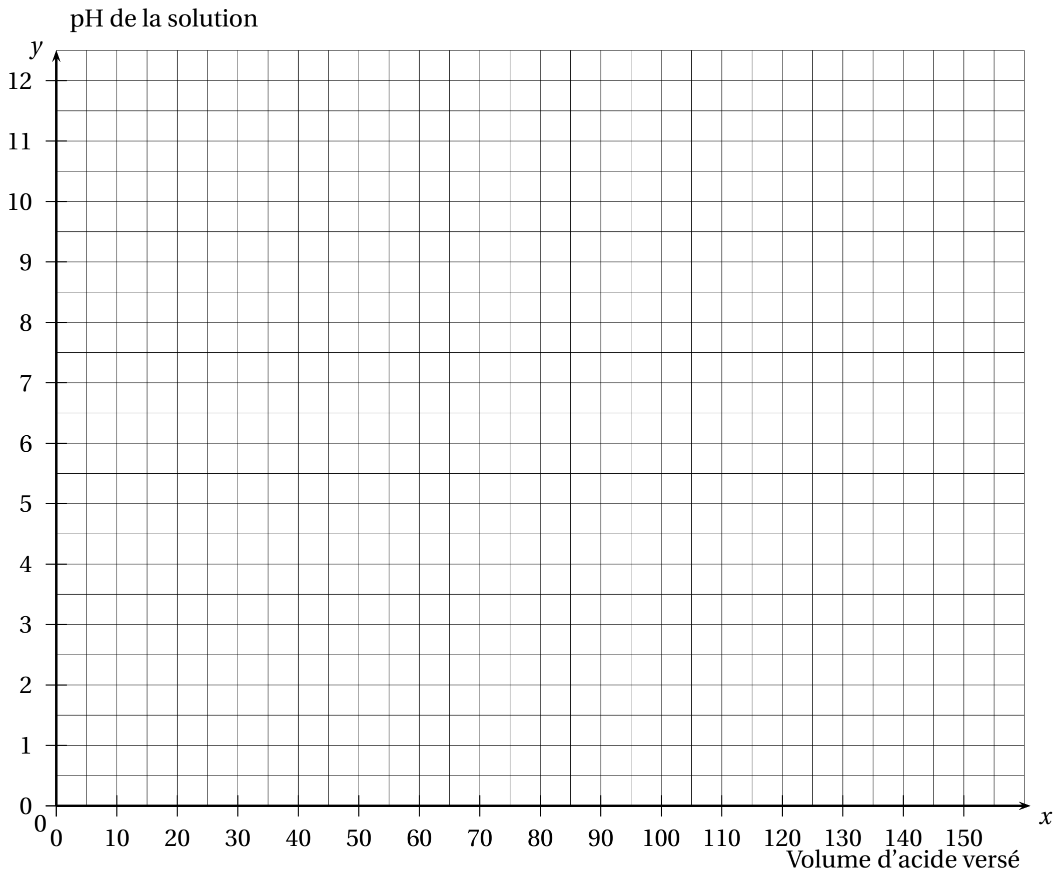
1. **a.** Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0\ ,\ 150]$: $f'(x) = -0,01 - \dfrac{1,6\mathrm{e}^{0,2x-16}}{\left(1 + \mathrm{e}^{0,2x-16}\right)^2}$
   b. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ,\ 150]$.
2. Représenter la courbe représentative de f sur le graphique de la partie A, annexe page 5.

Partie C : Comparaison

1. Pour 60 ml d'acide versé, comparer la valeur du pH obtenue par l'ajustement affine réalisé dans la partie A et celle obtenue par le modèle théorique de la partie B.
2. Le modèle théorique étant validé, l'ajustement affine réalisé dans la partie A pour x appartenant à $[0 ; 60]$ semble-t-il pertinent sur $[0 ; 150]$? Argumenter la réponse.

Annexe (à rendre avec la copie)

EXERCICE 4



∽ Baccalauréat STL Biotechnologies 18 juin 2014 ∾
Antilles-Guyane

EXERCICE 1 **7 points**

Des scientifiques étudient la croissance de plants de tomates d'une variété donnée après plantation. Ils ont établi que la hauteur des plants en centimètres peut être modélisée en fonction du temps par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{120}{5\mathrm{e}^{-0,08t} + 1}$$

où t est le temps en jours après le jour de plantation.

PARTIE A : ÉTUDE DE LA FONCTION f

1. Calculer la hauteur des plants le jour où ils sont plantés, c'est-à-dire $f(0)$.
2. **a.** Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ (on rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,08t} = 0$).

   b. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f. Tracer cette asymptote sur une feuille de papier millimétré fournie (*échelle :* 1 *unité pour* 10 *jours en abscisse et* 1 *unité pour 10*cm *en ordonnée). Note : le graphique sera complété par la suite.*

   c. Comment cela se traduit-il pour la croissance d'un plant ?
3. Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(t) = \dfrac{48\mathrm{e}^{-0,08t}}{(5\mathrm{e}^{-0,08t} + 1)^2}$.
4. Étudier le signe de f' sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
6. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f donné en **Annexe 1** (arrondir à 10^{-1} près).
7. Tracer la courbe représentative de f sur le papier millimétré.

PARTIE B : EXPLOITATION

1. Donner une inéquation permettant de déterminer au bout de combien de jours le plant mesurera plus de 30 cm de haut.
2. Résoudre cette inéquation (*on donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à l'unité du résultat*).
3. Retrouver le résultat du **2.** en utilisant la courbe représentative de f ou la calculatrice. (Dans les deux cas, on explicitera la démarche suivie).

PARTIE C : ALGORITHME

Initialisations
t prend la valeur 0
f prend la valeur 20
Traitement
Tant que $f < 30$
t prend la valeur $t + 1$
f prend la valeur $\dfrac{120}{5\mathrm{e}^{-0,08t} + 1}$
Fin Tant que
Sortie
Afficher t

1. L'entrée dans la boucle **Tant que** de cet algorithme dépend d'une condition. Quelle est cette condition ? Quand sortira-t-on de cette boucle ?
2. Quelles seront les trois premières valeurs de la variable t ? Donner les valeurs correspondantes de la variable f. (*Les résultats seront arrondis à l'unité.*)
3. Quelle sera la valeur de t affichée à la fin de l'algorithme ? Que représente concrètement cette valeur ?

EXERCICE 2 **3 points**

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 2x\ln(x) + x.$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de cette fonction dans un repère orthonormé est donnée en **Annexe 2**.

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0~;~+\infty[$ par $F(x) = x^2\ln(x)$ est une primitive de f.
2. Calculer $A = \displaystyle\int_1^2 (2x\ln(x) + x)\,\mathrm{d}x$.
   (*on donnera la valeur exacte du résultat, puis une valeur approchée à* 10^{-2} *près*)
3. À quoi cette intégrale correspond-elle sur le graphique de l'**Annexe 2** ?
   Illustrer la réponse en hachurant la zone correspondante du graphique.

EXERCICE 3 **6 points**

Dans cet exercice, les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Production de l'antibiotique spiramycine.

L'espèce *Streptomyces ambofaciens* a été sélectionnée pour sa production de spiramycine. Cet antibiotique est obtenu par la fermentation de la *Streptomyces ambofaciens* en bioréacteur.
Afin de prévoir au mieux la production de cet antibiotique, on cherche le développement de la *Streptomyces ambofaciens* dans le bioréacteur.

PARTIE A :

À $t = 0$ heure, la concentration de *Streptomyces ambofaciens* est mesuré à 3,10 g/l. Puis, à $t = 1$ h, elle est mesurée à 3,22 g/l.
En conséquence dans cette partie, on suppose que la concentration augmente de 4 % par heure.

On note : c_0 la concentration au temps $t = 0$, et $c_0 = 3,10$.
c_1 la concentration au temps $t = 1$
$\dots$
c_n la concentration au temps $t = n$

Tous les résultats de cette partie seront arrondis au centième.

1. Calculer c_1, c_2 et c_3.
2. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.
3. En déduire la nature de la suite (c_n) et préciser sa raison.
4. Exprimer c_n en fonction de n.
5. Si la fermentation se produit pendant 24 heures, calculer la concentration *Streptomyces ambofaciens* au bout de 24 h.

PARTIE B :

Après 24 h le milieu est renouvelé au sein du bioréacteur, à partir de ce moment on obtient le relevé suivant :

Heures	24	29	32	34	36	38	40
Rang de l'heure : x_i	0	5	8	10	12	14	16
Concentration de *Streptomyces ambofaciens* : y_i	7,95	11,05	12,05	13,45	14,15	15,45	16,75

1. Dans un repère orthogonal, construire un nuage de points $M(x_i\ ;\ y_i)$. En abscisse, pour le rang de l'heure, on prendra comme échelle 1 cm pour 2 heures et en ordonnée 1 cm pour 2 g/l ; on positionnera l'intersection des axes de coordonnées au point de coordonnées (0 ; 7).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. *On arrondira les coordonnées au dixième.*

   Placer G dans le repère.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés. *Les coefficients seront arrondis à* 10^{-2} *près.*
4. On décide d'ajuster le nuage avec la droite (D) d'équation $y = 0,53x + 8,03$.
   a. Tracer la droite (D) dans le repère précédent.
   b. En utilisant cet ajustement affine, estimer par une méthode graphique la concentration de *Streptomyces ambofaciens* au bout de 48 h (la réponse sera accompagnée de tracés sur le graphique).
   c. À partir de quelle heure la concentration de *Streptomyces ambofaciens* dépassera-t-elle 30 g/l ?

EXERCICE 4 — 4 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

PARTIE A :

Une entreprise agroalimentaire dispose d'un parc de machines d'ensachage toutes identiques.
La durée de vie en année d'une machine d'ensachage est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On rappelle que : $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$
Sur l'**Annexe 3**, on donne la courbe de la fonction représentative f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

1. Caractérisation de la loi.
   a. Représenter graphiquement sur l'**Annexe 3** la probabilité $P(X > 20)$.
   b. Comment peut-on déduire du graphique la valeur de λ ?

Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,1$.

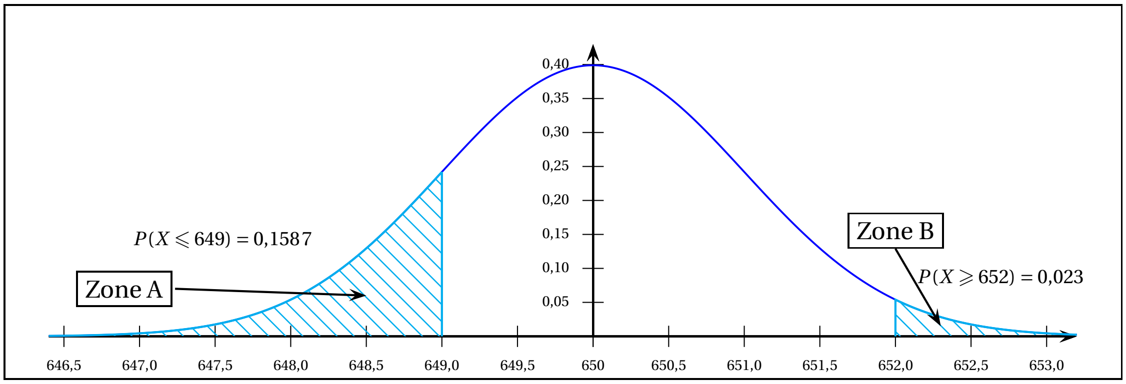
2. Quelle est la probabilité qu'une machine d'ensachage tombe en panne entre la dixième et la vingtième année ?

PARTIE B :

L'entreprise lance une production de paquets de préparation pour pancakes. Les paquets doivent contenir 650 g de préparation. On considère qu'un paquet est commercialisable s'il contient entre 648 g et 652 g.

On considère que la quantité Q, exprimée en grammes (g), de préparation réellement introduite dans les paquets par une machine d'ensachage suit une loi normale d'espérance $\mu = 650$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

A l'aide d'un logiciel, on obtient les résultats suivants :



1. Déterminer la probabilité qu'un paquet de préparation pour pancakes pris au hasard dans la production a pour masse entre 649 g et 652 g.
2. Calculer la probabilité qu'un paquet de préparation pour pancakes pris au hasard dans la production a pour masse moins de 648 g.

PARTIE C :

Les réglages de la machine d'ensachage ont été modifiés dans l'objectif d'obtenir une proportion $p = 97\,\%$ de paquets de préparation commercialisables. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un premier échantillon de 400 paquets fabriqués.

1. En supposant que cet objectif a été atteint déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de paquets de préparation commercialisables dans un échantillon de taille 400.
2. Parmi les 400 paquets de l'échantillon, 381 sont commercialisables.

   En utilisant l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on estimer au seuil de 95 % que l'objectif a été atteint ?

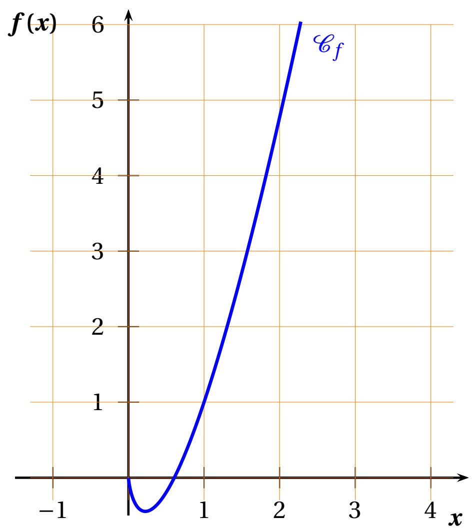
ANNEXE 1 À rendre avec la copie

EXERCICE 1 : Tableau de valeurs de la fonction f

t	0	10	20	30	40	50	60
$f(t)$							

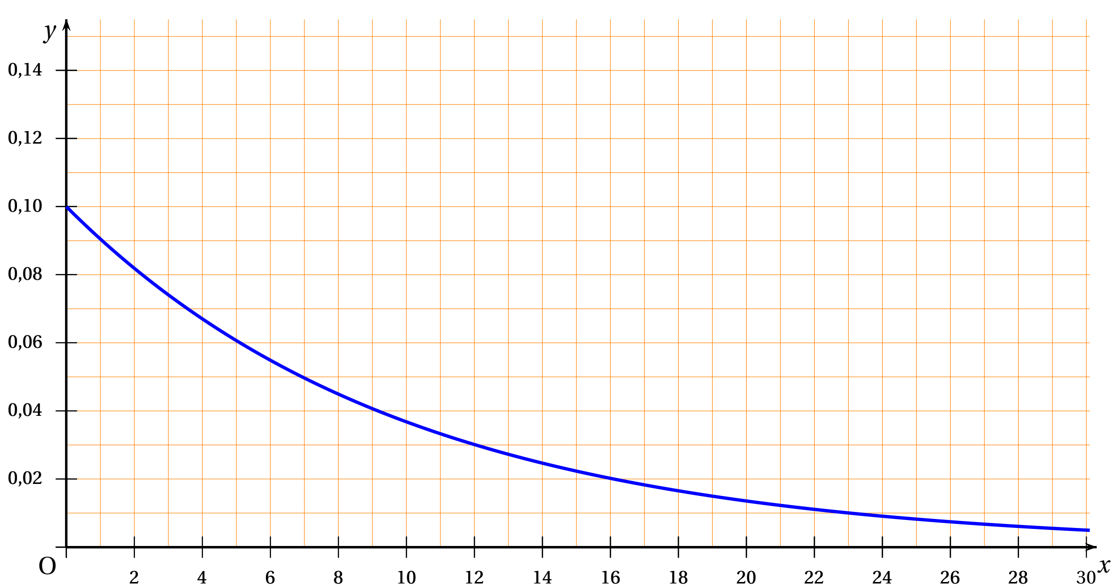
ANNEXE 2 À rendre avec la copie

EXERCICE 2 : Courbe représentative de la fonction f



ANNEXE 3 À rendre avec la copie

EXERCICE 4 : Courbe représentative de la fonction f



൞ Baccalauréat STL Biotechnologies 19 juin 2014 ൟ
Métropole

EXERCICE 1 **4 points**

On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution de la production annuelle en Indonésie de la vanille, épice utilisée dans les industries agroalimentaire et cosmétique. Le tableau ci-dessous donne la production de vanille en Indonésie :

Année	1970	1980	1990	1995	2000	2005	2010
Rang de l'année : x_i	0	10	20	25	30	35	40
Production en tonnes : y_i	250	761	1 262	1 958	1 681	2 366	2 600

Source : FAOSTAT

1. On pose $z_i = \ln(y_i)$
   Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats à 10^{-2} près.

Rang de l'année : x_i	0	10	20	25	30	35	40
z_i							

2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, z_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal sur l'annexe, page 15.
3. Calculer les coordonnées, à 10^{-2} près, du point moyen G du nuage. Placer le point G sur le graphique.
4. On réalise un ajustement affine de ce nuage de points $M_i\ (x_i\ ;\ z_i)$.
   À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite D d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 10^{-4} près).
   Construire la droite D sur le graphique de l'annexe, page 15.
5. En déduire, selon ce modèle d'ajustement, l'expression de la production y en fonction du rang de l'année x.
6. Quelle serait, selon ce modèle d'ajustement, la production de vanille en Indonésie en 2015 ?

EXERCICE 2 **5 points**

On injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2 cm^3 d'un antalgique.
L'organisme du patient élimine 5 % du produit présent tous les quarts d'heure.
On s'intéresse à la quantité d'antalgique, en mm^3, présent dans le sang du patient au bout de n quarts d'heure après le début de l'injection.
La situation peut être modélisée par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 2000$, u_n représentant une estimation de la quantité d'antalgique en mm^3 présent dans le sang du patient après n quarts d'heure.

1. Vérifier que la quantité de produit présent dans le sang du patient un quart d'heure après l'injection est égale à 1 900 mm^3.
2. **a.** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b. En déduire la nature de la suite (u_n).

c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

4. Le produit est jugé inefficace lorsque la quantité présente dans le sang est inférieure à 1 500 mm^3. Déterminer au bout de combien de quarts d'heure le produit devient inefficace. On précisera la démarche choisie.

5. **a.** Pendant une durée égale à N quarts d'heure, on décide de réinjecter 500 mm^3 du même antalgique dès que la quantité du produit présent dans le sang devient inférieure à 1 500 mm^3.
Compléter, sur l'annexe page 15, l'algorithme déterminant la quantité d'antalgique présent dans le sang du patient au bout de ces N quarts d'heure.

b. En faisant fonctionner l'algorithme, déterminer la quantité d'antalgique présent dans le sang au bout de quatre heures.

EXERCICE 3 — 6 points

Le but de l'exercice est de suivre l'évolution d'une concentration de bactéries.
Les unités choisies sont l'heure pour le temps et le million de bactéries par millilitre pour la concentration.

Partie A

On admet que la concentration de bactéries en fonction du temps est donnée à l'instant t par $f(t)$ où f, fonction définie sur $[0, +\infty[$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E): \quad y' + 0,2y = 8.$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0, +\infty[$.

2. À l'instant $t = 0$, la concentration est de 4 millions de bactéries par millilitre. Donner l'expression de la concentration des bactéries en fonction du temps.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = -36\mathrm{e}^{-0,2t} + 40$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on donner de cette limite ?

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de f.
Calculer $f'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$.

b. En déduire les variations de f sur $[0, +\infty[$.

Partie C

On admet que $f(t)$ représente la concentration des bactéries étudiée dans la partie A.

1. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour une heure en abscisse et 1 cm pour 5 millions de bactéries par millilitre en ordonnée.

2. En faisant apparaître les constructions utiles, déterminer graphiquement :

a. la concentration des bactéries au bout de 6 h 30 ;

b. le temps nécessaire pour que la concentration des bactéries soit supérieure à 35 millions de bactéries par millilitre.

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

Un laborantin dispose d'un stock de pipettes jaugées. Une pipette est considérée conforme au cahier des charges si son volume est compris entre 24,95 et 25,05 ml.
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute pipette prise au hasard dans le stock, associe son volume en ml. Le fabricant affirme que Y suit la loi normale d'espérance 25 et d'écart type $0,03$.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme au cahier des charges, selon les affirmations du fabricant.
2. Le laborantin prélève un échantillon de 100 pipettes et constate que seulement 83 d'entre elles sont conformes au cahier des charges.
   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de pipettes conformes dans un échantillon de taille 100 (on donnera les bornes de l'intervalle à 10^{-4} près).
   b. La fréquence de pipettes conformes observée remet-elle en question l'affirmation du fabricant ? Justifier.

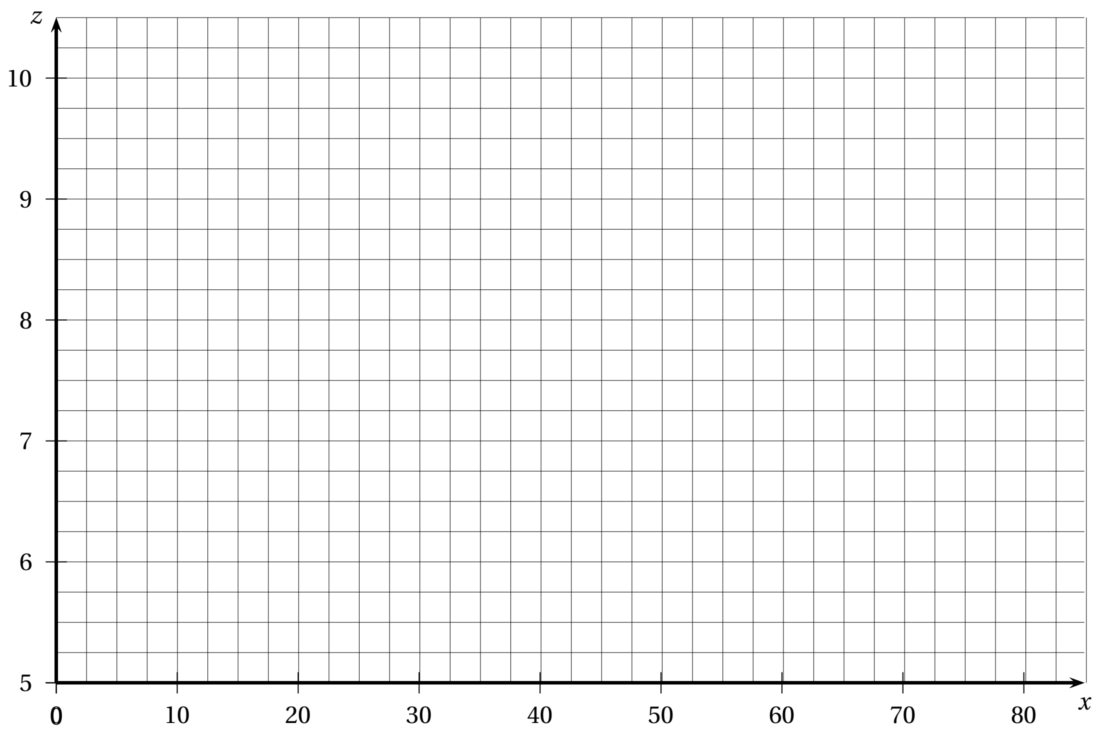
Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse aux défaillances d'une machine qui fabrique les pipettes. Lorsqu'une révision complète de cette machine a été effectuée, la durée de fonctionnement (en jours) avant une défaillance est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,005$.
On rappelle que, dans ces conditions, pour tout t positif, la probabilité que cette machine ait une défaillance avant un temps t est égale à $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^t 0,005\mathrm{e}^{-0,005x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-0,005t}$.
2. Déterminer la probabilité $P(X \leqslant 200)$ à 10^{-4} près. Quelle interprétation peut-on donner de cette probabilité ?
3. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que la machine ait une défaillance au-delà de 300 jours après une révision complète.
4. Un arrêt pour entretien doit intervenir systématiquement lorsque la probabilité que la machine soit défaillante est égale à 0,5.
   Au bout de combien de jours faut-il prévoir l'arrêt pour l'entretien de cette machine ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

EXERCICE 1



EXERCICE 2

Variables :	u nombre réel, N entier
Entrée :	Saisir N
Traitement :	
	Affecter à u la valeur 2 000
	Pour i allant de 1 à ……faire
	Affecter à $u$la valeur $u \times \ldots$
	Si u est inférieur à ……
	Alors affecter à u la valeur $u + \ldots\ldots$
	Fin si
	Fin pour
	Afficher u
Fin	

∽ Baccalauréat STL Biotechnologies Métropole–La Réunion ∾
11 septembre 2014

EXERCICE 1 **4 points**

Une entreprise fabrique en très grande quantité des gélules vides destinées à l'industrie pharmaceutique. La fabrication est faite à l'aide d'une machine.
On admet que la masse M, en milligrammes, d'une gélule suit une loi normale d'espérance 66 et d'écart type $0,5$.

1. Déterminer la probabilité pour qu'une gélule prise au hasard ait :

  a. une masse comprise entre 65 et 67 mg.

  b. une masse inférieure à 65,5 mg. Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

2. Une gélule est considérée comme conforme si sa masse est comprise entre 65 et 67 mg. La probabilité pour qu'une gélule soit considérée comme conforme est égale à 0,95.
On prélève au hasard un lot de 50 gélules. On suppose que l'effectif est assez important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On désigne par X le nombre de gélules considérées comme conformes dans ce lot.

  a. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer n et p.

  b. Déterminer la probabilité que le lot contienne 50 gélules conformes.
  Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

3. On s'intéresse maintenant à la couleur de chaque gélule. On prélève un lot de 1 000 gélules dans la production quotidienne de la machine. Dans cet échantillon, 43 gélules présentent un défaut de teinte.
Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion de gélules présentant un défaut de teinte.
Les bornes de l'intervalle seront arrondies à 10^{-4} près.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Dans une expérience de laboratoire, sous certaines conditions, une population de bactéries double toutes les heures. Initialement, on compte 1 000 bactéries. On souhaite déterminer l'heure où il y en aura dix fois plus.

  a. Parmi les trois algorithmes suivants, quel est celui répondant au problème ?

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
N prend la valeur 1 000	N prend la valeur 1 000	N prend la valeur 1 000
H prend la valeur 0	Tant que $N < 10000$ faire	H prend la valeur 0
Tant que $N < 10000$	N prend la valeur $2 \times N$	Tant que $N < 10000$ faire
faire	Fin Tant que	H prend la valeur $H + 1$
N prend la valeur $2 \times N$	H prend la valeur $H + 1$	N prend la valeur $2 \times N$
Fin Tant que	Afficher H	Fin Tant que
Afficher H		Afficher H

b. Quelle sera la valeur affichée par l'algorithme répondant au problème posé ?

2. Dans une autre expérience, au début il y a 300 anticorps et 500 bactéries. Les anticorps augmentent de 10 % par heure, les bactéries augmentent de 7 % par heure.

On note a_n et b_n respectivement le nombre d'anticorps et de bactéries à l'heure n.

Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 500$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1,1 \times a_n$, et en déduire une expression de a_n en fonction de n.

b. Exprimer par une démarche analogue b_n en fonction de n.

c. Déterminer les entiers naturels n tels que $a_n > b_n$. En déduire l'heure à partir de laquelle il y aura plus d'anticorps que de bactéries.

EXERCICE 3 **5 points**

Les deux parties de l'exercice proposent une approche différente de l'étude cinétique d'une réaction catalysée par la β-fructosidase.

La vitesse initiale v de la réaction a été mesurée en présence de différentes concentrations, notées s, de substrats dans des conditions identiques de pH et de température. Les résultats sont les suivants :

Concentration de substrat s_i en mmol.L^{-1}	0,1	0,2	0,3	0,5	1	1,3
Vitesse initiale v_i en μmol par minute	4,5	5,6	6,3	6,9	7,7	8,1

Partie A : Utilisation d'un changement de variable

1. On effectue les changements de variable : $x_i = \dfrac{1}{s_i}$ et $y_i = \dfrac{1}{v_i}$.

x_i	10					
y_i	0,22					

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessus (valeurs arrondies à 10^{-2} près).

b. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i,\ y_i\right)$ sur une feuille de papier millimétré.

On choisira 1 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour 0,02 en ordonnée.

2. **a.** Par la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite d'ajustement D sous la forme $y = ax + b$ (a est arrondi à 10^{-4} près et b est arrondi à 10^{-2} près).

b. Tracer la droite D sur le graphique précédent.

3. On admet que la β-fructosidase suit le modèle de Michaelis-Menten et on peut alors écrire :

$\dfrac{1}{v} = \dfrac{K_M}{v_{\max}} \times \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{v_{\max}}$ où $v_{v_{\max}}$ est la vitesse initiale maximale et K_M est la constante de Michaelis spécifique de la β-fructosidase.

On admet que $a = \dfrac{K_M}{v_{\max}}$ et $b = \dfrac{1}{v_{\max}}$ où a et b sont les valeurs obtenues à la question **2. a**.

En déduire $v_{\max}$ à 10^{-2} près, puis KM à 10^{-4} près.

Partie B : Utilisation d'une représentation de Michaelis-Menten

Sur l'annexe, on a placé les points $N_i\,(s_i,\ v_i)$ relevés expérimentalement et on a tracé la courbe de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(s) = v = \frac{s}{0,01 + 0,12s} = \frac{1}{\dfrac{0,01}{s} + 0,12}.$$

On estime que cette courbe C est un ajustement acceptable des relevés expérimentaux.

1. **a.** Déterminer la limite de v lorsque s tend vers $+\infty$. Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
   b. En déduire que la courbe C admet une asymptote que l'on tracera sur l'annexe.
   c. En admettant que v_{max} est la limite de v quand s tend vers $+\infty$, donner v_{max}.
2. Résoudre graphiquement $f(s) = \dfrac{v_{\text{max}}}{2}$. On laissera apparents les traits de construction.
   Remarque : la solution est appelée la constante de Michaelis K_M.

EXERCICE 4 **7 points**

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,2y = 100$$

où y est une fonction dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
2. Démontrer que la solution y de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction y définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $y(t) = 500\left(1 - \text{e}^{-0,2t}\right)$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = 500\left(1 - \text{e}^{-0,2t}\right).$$

On désigne par C_1, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$. Que représente la droite D d'équation $y = 500$ pour la courbe C_1 ?
2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = 100\text{e}^{-0,2t}$.
   b. En déduire le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie C : exploitation des résultats de la partie B

Lors de l'étude de la progression d'une épidémie sur une population de 2 000 personnes, on a établi que le nombre d'individus contaminés à la date t, exprimée en jours, est donné par :

$$f(t) = 500\left(1 - \text{e}^{-0,2t}\right) \quad \text{pour } t \text{ entre } 0 \text{ et } 30.$$

1. Combien de personnes sont contaminées après un jour d'épidémie ? Après dix jours ? Les résultats seront arrondis à l'unité près.
2. De quel pourcentage a augmenté le nombre de personnes contaminées entre le premier et le dixième jour de l'épidémie ? On donnera la réponse en %, arrondie au centième près.
3. Le tiers de la population peut-il être contaminé ?
4. Au bout de combien de jours, le huitième de la population est-il contaminé ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3 : Points $N_i\,(s_i,\ n_i)$ et représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(s) = v = \frac{s}{0,01 + 0,12s} \quad \text{où } v \text{ est en } \mu\text{mol par minute et } s \text{ en mmol par litre.}$$