Baccalauréat STL 2016

L'intégrale de juin à septembre 2016

Baccalauréat STL biotechnologies Polynésie 13 juin 2016

EXERCICE 1 **4 points**

Dans cet exercice, on s'intéresse au taux de cholestérol LDL de la population d'adultes d'un pays.
On note X la variable aléatoire qui, à un adulte de cette population, associe son taux de cholestérol LDL, exprimé en grammes par litre.
On admet que X suit la loi normale d'espérance $1,27$ et d'écart type $0,39$.

1. **a.** Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité qu'un adulte, choisi au hasard dans cette population, ait un taux de cholestérol LDL compris entre 1 et $1,6$ gramme par litre.

   b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité qu'un adulte, choisi au hasard dans cette population, ait un taux de cholestérol LDL supérieur à $1,9$ gramme par litre.

2. Dans la population étudiée, 28 % des adultes souffrent d'hypercholestérolémie LDL (ils ont un taux de cholestérol LDL trop élevé).

   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL, dans un échantillon de 300 adultes choisis au hasard dans la population étudiée. On arrondira les bornes de l'intervalle à 10^{-3}.

   b. Les médecins d'une ville de ce pays s'interrogent sur la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans leur ville. Ils disposent d'un groupe de 300 adultes pris au hasard parmi les adultes de la ville. Ils constatent que 96 d'entre eux souffrent d'hypercholestérolémie LDL.

   En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, peut-on dire, que la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans cette ville est significativement plus élevée que dans l'ensemble de la population du pays ? Justifier la réponse.

3. Deux laboratoires fabriquent un médicament anti-cholestérol LDL.

   Le médicament du laboratoire A est testé sur un échantillon de 1 000 adultes et s'avère efficace pour 870 d'entre eux.

   Le médicament du laboratoire B est testé sur un échantillon de 800 adultes et s'avère efficace pour 720 d'entre eux.

   a. Un intervalle de confiance à 95 % de la proportion p_A d'adultes pour lesquels le médicament du laboratoire A est efficace, est $[0,849 ; 0,891]$.

   Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la proportion p_B d'adultes pour lesquels le médicament du laboratoire B est efficace.

   b. Ces résultats permettent-ils de considérer qu'il y a une différence significative entre ces deux médicaments en termes d'efficacité ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Pierre possède une piscine naturelle de 80 000 litres d'eau. Des plantes épuratives jouent le rôle de filtration naturelle. Afin d'améliorer l'oxygénation de l'eau, Pierre décide de recycler en permanence une partie de l'eau de la piscine en la remplaçant par l'eau d'un puits voisin. Malheureusement, Pierre ne sait pas que l'eau du puits, captée par une pompe, est contaminée par des germes.
Avant la mise en route de la pompe, l'eau de la piscine n'est contaminée par aucun germe. La quantité d'eau contaminée au cours du temps est modélisée par une fonction f . Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis la mise en route de la pompe, $f(t)$ représente la quantité, en litres, d'eau contaminée venant du puits au bout de t heures de pompage.
On admet que la fonction f, définie sur $[0 ; +\infty[$, est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0,00625y = 30.$$

1. **a.** Donner les solutions de cette équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Sachant que $f(0) = 0$, déterminer une expression de $f(t)$ pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$.

   Dans les questions suivantes, on admet que pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f(t) = 4\,800 - 4\,800\mathrm{e}^{-0,00625t}.$$

2. Calculer, en litres, la quantité d'eau contaminée venant du puits au bout de 72 heures. Le résultat sera arrondi à l'unité.

3. **a.** Calculer $f'(t)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. En déduire le tableau de variations de la fonction f (on admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 4\,800$).

   b. Ce sens de variation de la fonction f déterminé est-il cohérent avec la situation concrète étudiée.

   Pourquoi ?

4. La piscine devient dangereuse pour la peau lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 6 % du volume d'eau de la piscine.

   Cette piscine peut-elle être dangereuse pour la peau ? Justifier.

5. La piscine devient impropre à la baignade lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 3 % du volume d'eau de la piscine.

   Déterminer, à l'heure près, au bout de combien de temps l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.

EXERCICE 3 **5 points**

En 2013, la production française de déchets d'équipements électriques et électroniques (déchets EEE) s'élève à 1,55 million de tonnes. (*Source : Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie*)

1. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? On justifiera la réponse. « En 2013, la production française de déchets EEE par seconde est de 49 kg, au kilogramme près. »

   On s'intéresse à la production française, exprimée en millions de tonnes, de déchets EEE par an à partir de 2013. On estime qu'à compter de l'année 2013, la production française de déchets EEE augmente de 3 % par an. Ainsi, la situation peut être modélisée par une suite géométrique (u_n), où pour tout entier naturel n, u_n est une estimation de la production française de déchets EEE (exprimée en millions de tonnes) en $2013 + n$.

2. **a.** Préciser la raison et le premier terme de la suite (u_n).

   b. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

3. Calculer la production française de déchets EEE en 2020. Le résultat sera arrondi à 0,01 million de tonnes.

4. En quelle année la production française de déchets EEE dépassera-t-elle 2 millions de tonnes ? Justifier la réponse.

5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :
n entier naturel
u et S réels
Initialisation :
Affecter à u la valeur 1,55
Affecter à S la valeur 1,55
Traitement :
Pour n allant de 1 à 5
Affecter à u la valeur $1,03 \times u$
Affecter à S la valeur $S + u$
Fin Pour
Sortie :
Afficher S

a. Indiquer dans le tableau les valeurs successives prises par les variables u et S lors du déroulement de l'algorithme (les résultats seront arrondis à 10^{-3}) :

n	0	1	2	3	4	5
u	1,55	1,597				
S	1,55	3,147				

b. Quel résultat sera affiché à l'issue de cet algorithme ? Interpréter concrètement cette valeur en termes de production française de déchets EEE.

EXERCICE 4 — 6 points

Une étude vise à quantifier la probabilité y_i, pour une personne donnée, de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d' œuf ou de poulet selon le nombre n_i de bactéries *Salmonella* qui y sont présentes.
Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau suivant :

n_i	15	50	400	6 300	$2,5\cdot 10^4$	$6,3\cdot 10^5$	$2\cdot 10^6$	$4\cdot 10^8$	$6,3\cdot 10^9$
$x_i = \log(n_i)$	1,2	1,7							
y_i	0,02	0,15	0,27	0,63	0,71	0,84	0,92	1	1

(Source : *Organisation des Nations Unies pour l'alimentation et l'agriculture*)

On rappelle que log désigne le logarithme décimal.

1. **a.** On pose $x_i = \log(n_i)$. Compléter le tableau de valeurs fourni en annexe 1 (on arrondira les résultats au dixième).

b. Calculer les coordonnées, à 10^{-1} près, du point moyen G du nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ et placer le point G sur le graphique de l'annexe 2.

2. On note (D) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

a. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite (D) sous la forme $y = ax + b$, les réels a et b étant arrondis au millième.

b. Construire la droite (D) sur le graphique de l'annexe 2.

c. En utilisant ce modèle d'ajustement, estimer, à 10^{-2} près, la probabilité de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet dans lesquels le nombre de bactéries *Salmonella* est de 4 000.

3. Dans cette question, on utilise un nouveau modèle d'ajustement.

Pour un nombre n de bactéries donné, on pose $x = \log n$ et, dans ce nouveau modèle, on note $f(x)$ la probabilité, pour une personne donnée, de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet selon le nombre n de bactéries *Salmonella* qui y sont présentes.

On suppose que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{1+34,8\text{e}^{-x}}.$$

a. On détermine la fonction dérivée de la fonction f grâce à un logiciel de calcul formel. On a obtenu l'affichage suivant :

1	f(x) :=1/ (1+34.8*e^(-x))
	$x \to \dfrac{1}{1+34.8*\exp(-x)}$
2	deriver (f(x))
	$34.8 * \dfrac{\exp(-x)}{(34.8*\exp(-x)+1)^2}$

En déduire le sens de variation de la fonction f.

b. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe 2.

c. En utilisant ce nouveau modèle, déterminer la probabilité de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet dans lesquels le nombre de bactéries *Salmonella* est de 4 000. On en donnera la valeur arrondie au centième.

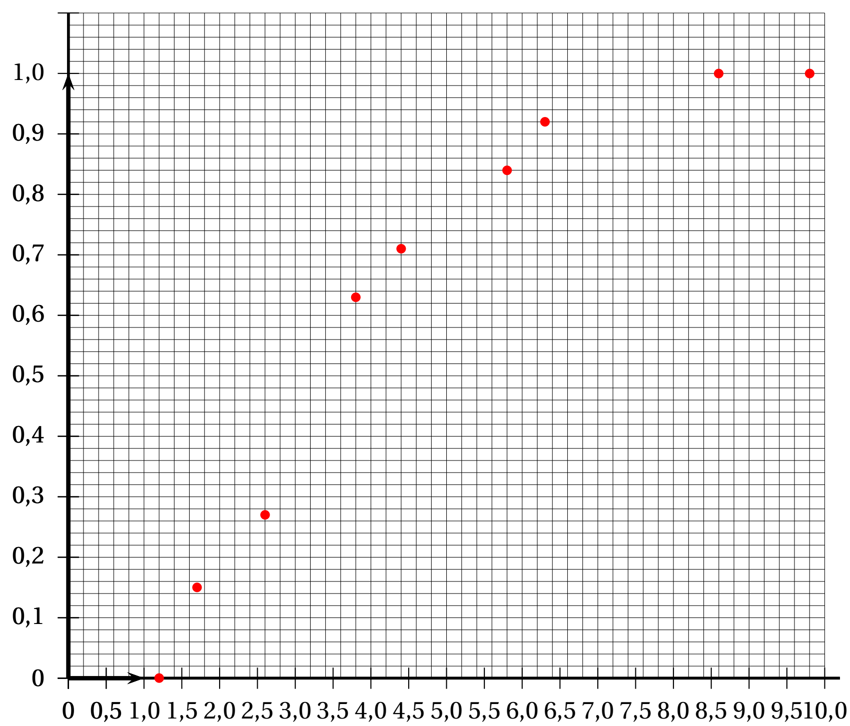
d. En utilisant ce nouveau modèle, estimer le nombre de bactéries *Salmonella* d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet telle que la probabilité d'être malade soit égale à 0,75. On expliquera la démarche utilisée.

ANNEXES À JOINDRE A LA COPIE

Annexe 1 (exercice 4)

n_i	15	50	400	6 300	$2,5\cdot 10^4$	$6,3\cdot 10^5$	$2\cdot 10^6$	$4\cdot 10^8$	$6,3\cdot 10^9$
$x_i = \log(n_i)$	1,2	1,7							
y_i	0,02	0,15	0,27	0,63	0,71	0,84	0,92	1	1

Annexe 2 (exercice 4)



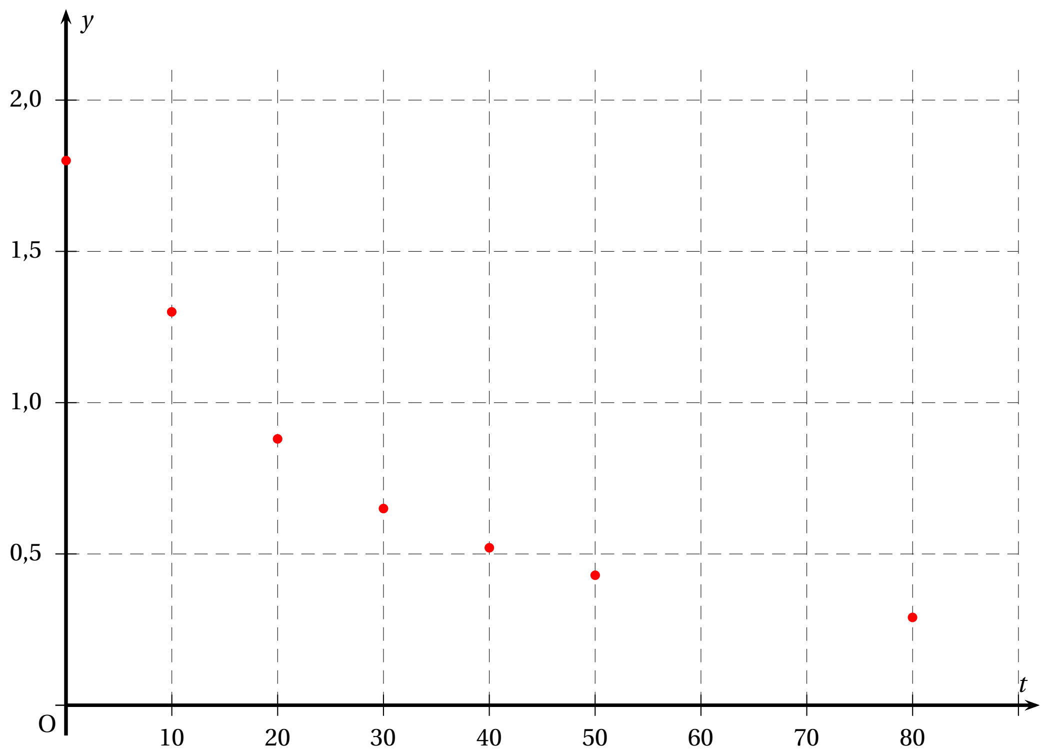
☙ Baccalauréat STL biotechnologies Antilles-Guyane 16 juin 2016 ❧

Exercice 1 **3 points**

Le tableau ci-dessous donne la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau (en cm^3/ml d'eau) à la pression de 1 bar, pour différentes valeurs de la température (en °C).

Température t_i	0	10	20	30	40	50	80
Solubilité y_i	1,8	1,3	0,88	0,65	0,52	0,43	0,29

Le nuage de points représentant cette série est donné par le graphique suivant :



1. La forme de ce nuage conduit à envisager un ajustement exponentiel de la série $(t_i\ ;\ y_i)$.
On pose $z_i = \ln(y_i)$.
Recopier **sur votre copie** et compléter le tableau ci-dessous. On arrondira les valeurs de z_i à 10^{-3} près.

Température t_i	0	10	20	30	40	50	80
$z_i = \ln(y_i)$							

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en t de la série $(t_i\ ;\ z_i)$ par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients à 10^{-3}.

3. Dans la suite, on retient pour droite d'ajustement la droite d'équation $z = -0,023t + 0,41$. Déduire de cette équation que la relation entre la solubilité y du dioxyde de carbone et la température t peut se modéliser sous la forme $y = Ae^{-0,023t}$ où $A = 1,51$ à 10^{-2} près.

4. En supposant que l'ajustement précédent est valable pour toute valeur de t comprise dans l'intervalle $[0\,;\,80]$, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau à la température de 65 °C.

EXERCICE 2 (4 points)

Initialement, une population de bactéries compte 50 000 individus. L'évolution du nombre de bactéries, en fonction du temps, est étudiée dans un laboratoire où travaillent deux techniciens.

PARTIE A :

L'un des deux techniciens émet l'hypothèse que cette population augmente de 23 % toutes les heures. On modélise l'évolution du nombre de bactéries par (u_n) une suite de nombres réels.

1. Donner la valeur de u_0. Calculer u_1 et u_2 (arrondir les valeurs à l'entier le plus proche).
2. **a.** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. En déduire que (u_n) est une suite géométrique de raison $1,23$.
3. **a.** Exprimer u_n en fonction de n.
   b. Calculer u_7 à l'entier près. Que représente ce nombre ?
4. Au bout de combien d'heures, selon l'hypothèse émise par ce technicien, le nombre de bactéries dépasse-t-il 500 000 ?

PARTIE B :

Le deuxième technicien du laboratoire émet une hypothèse un peu différente et considère que le nombre de bactéries augmente de p% toutes les heures ($p \neq 23$). Pour déterminer au bout de combien d'heures, selon son hypothèse, le nombre de bactéries dépasse 500 000, il a réalisé l'algorithme suivant. Cependant, une partie de l'algorithme a été effacée, et on ne dispose que des premiers résultats affichés par celui-ci.

Algorithme	Résultats de l'algorithme
Variables : N est un nombre entier	
p et U sont des nombres réels	
Début :	$N = 0$ $U = 50000$
Lire p	
N prend la valeur 0	$N = 1$ $U = 63500$
U prend la valeur 50 000	
Tant que $U <$ ……	
N prend la valeur……	$N = 2$ $U = 80645$
U prend la valeur ……	$N = 3$ $U = 102673,15$
Afficher la valeur de N	.
Afficher la valeur de U	.
Fin du tant que	.
Afficher N	.
Afficher U	.
Fin	.

1. En utilisant les premiers résultats affichés par l'algorithme, déterminer la valeur de p.
2. Sur votre copie, recopier l'algorithme figurant dans la colonne de gauche du tableau, et compléter les parties manquantes (repérées par des pointillés).
3. Au bout de combien d'heures, selon cette hypothèse, le nombre de bactéries dépasse-t-il 500 000 ?

EXERCICE 3 (5 points)

PARTIE A : RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Les fonctions intervenant dans cette partie sont définies et dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.
On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,6y = 45.$$

1. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).

3. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 20$.

PARTIE B : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(t) = -55\mathrm{e}^{-0,6t} + 75.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $(\mathscr{C})$?

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f.

c. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur une feuille de papier millimétré **à remettre avec la copie**. Unités graphiques : 1 cm en abscisse ; 2 mm en ordonnées.

3. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 70$ (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité).

4. Calculer $I = \displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}).
Donner une interprétation graphique du résultat.

PARTIE C : UTILISATION DES RÉSULTATS

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Le principe de la haute pasteurisation consiste à chauffer dans un autoclave, pendant un laps de temps de 15 secondes, les aliments à une température comprise entre 70 °C et 75 °C.
Du lait dont la température initiale est de 20 °C est introduit dans un autoclave dont la température est constante et égale à 75 °C. La température du lait est donnée par la fonction f définie dans la partie B, où t est le temps en secondes.
Déterminer combien de temps, au total, le lait doit rester dans l'autoclave afin d'être pasteurisé.

EXERCICE 4 **(5 points)**

On étudie le taux de glycémie dans une population donnée, exprimé en g/L.

PARTIE A :

On suppose que le taux de glycémie est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,03$. On mesure la glycémie chez une personne choisie au hasard dans la population.

1. Justifier que la probabilité pour que la glycémie de cette personne soit comprise entre 0,94 et 1,06 a pour valeur approchée 0,95.

2. En déduire qu'une valeur approchée de $P(X \leqslant 1,06)$ est $0,975$. Justifier votre raisonnement.

3. Sachant que $P(X \geqslant 0,97)$ a pour valeur approchée $0,84$, en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(0,97 \leqslant X \leqslant 1,06)$.

PARTIE B :

Un médecin, qui ne connaît pas l'hypothèse émise dans la PARTIE A, souhaite estimer la proportion p inconnue des personnes de cette population dont le taux de glycémie est supérieur à $1,06$. Il prélève au hasard un échantillon de 1 000 personnes dans la population étudiée.
Il constate que 29 personnes ont un taux de glycémie supérieur à 1,06.

1. Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion p.
2. Le résultat précédent est-il cohérent avec la réponse à la question **A 2.** ? Justifier.

PARTIE C :

On admet que, dans la population étudiée, la probabilité qu'une personne ait un taux de glycémie supérieur à 0,99 g/L est $p_1 = 0,64$.
On tire un échantillon de 100 personnes au hasard. On suppose que la population est suffisamment importante pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage avec remise de 100 personnes. On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes dont la glycémie est supérieure à 0,99 g/L.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

On suppose que les conditions permettant d'approximer une loi binomiale par une loi normale sont remplies. On appelle μ' la moyenne et σ' l'écart type de la loi normale Z approximant la loi binomiale Y .

2. Justifier que $\mu' = 64$ et $\sigma' = 4,8$.
3. Déterminer une valeur approchée de $P(Z \leqslant 78,4)$ à 10^{-2} près. On remarquera que $78,4 = \mu' + 3\sigma'$.

EXERCICE 5 **(3 points)**

QUESTIONNAIRE À CHOIX MULTIPLE

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Chaque bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.
Reporter sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 3\right)$, et soit (C) sa représentation graphique dans un repère du plan. La tangente à la courbe (C) au point A(1 ; ln(4)) a pour coefficient directeur :
   a. $0,25$ **b.** $0,5$ **c.** 1 **d.** $\ln 4$
2. On considère deux variables aléatoires Y et Z.
   Y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1 ; 3]$.
   Z suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
   a. Y et Z ont la même variance.
   b. Y et Z ont la même espérance.
   c. La variance de Z est strictement inférieure à la variance de Y.
   d. La variance de Z est nulle.
3. Une culture bactériologique comporte initialement 8 000 bactéries.
   Leur nombre augmente de 20 % par heure.
   Dans la copie de la feuille de tableur ci-dessous, quelle formule peut-on rentrer en B3, puis recopier vers le bas, pour calculer le nombre de bactéries en fonction de l'heure ?

	A	B
1	Temps (heures)	Nombre de bactéries
2	0	8 000
3	1	
4	2	

a. = B2 + 0,20 **b.** = 0,8 * B2 **c.** = 1,2 * B2 **d.** = 1,2 * B2.

∽ Baccalauréat STL biotechnologies Métropole–La Réunion ∾
16 juin 2016

Calculatrice autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

EXERCICE 1 **6 points**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes. On arrondira les résultats à 10^{-3}.
Une laiterie produit des fromages, frais ou secs.

1. Pour être accepté, un fromage frais doit avoir une masse supérieure à 240 grammes. On appelle M la variable aléatoire qui à tout fromage frais, prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en grammes. On suppose que M suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 5$.
Quelle est la probabilité qu'un fromage frais prélevé au hasard dans la production soit refusé ?

2. On suppose que 2 % des fromages frais produits ont une masse insuffisante. On prélève un échantillon de 150 fromages frais, pris au hasard dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 150 fromages frais, pris au hasard dans la production, associe le nombre de fromages de masse insuffisante dans l'échantillon.
   a. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   b. Quelle est la probabilité qu'il y ait dans le prélèvement au maximum cinq fromages de masse insuffisante ?
   c. Déterminer l'espérance de X et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. La laiterie estime que 18 % de ses consommateurs de fromages préfèrent les fromages secs.
   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence f des consommateurs de la laiterie préférant les fromages secs dans un échantillon de 400 personnes.
   b. La laiterie interroge au hasard un échantillon de 400 consommateurs sur leur préférence ; 55 d'entre eux déclarent préférer les fromages secs. La laiterie doit-elle alors considérer que la préférence de sa clientèle concernant les fromages secs a changé ? Pourquoi ?

4. Pour peser ses fromages, l'entreprise fait appel à un fabricant de balances électroniques. La variable aléatoire T qui, à chaque balance choisie au hasard dans la production de ce fabricant, associe la durée (exprimée en heures) pendant laquelle la balance est réglée correctement, suit la loi exponentielle de paramètre λ, λ étant un réel. Une balance produite chez ce fabricant reste, en moyenne, correctement réglée durant 90 heures.
   a. Déterminer la valeur exacte de λ.
   b. On extrait au hasard une balance de la production. Déterminer le réel t_0 tel que $P(T \geqslant t_0) = 0,93$. Comment interpréter ce résultat ?

EXERCICE 2 **5 points**

Une petite entreprise familiale veut stériliser une partie de sa production maraîchère sous forme de conserves, à l'aide d'un autoclave.

1. Soit f la fonction qui à tout temps t, exprimé en minutes, associe la température, exprimée en degrés Celsius, au coeur de la conserve placée dans l'autoclave. On admet que la fonction f ainsi définie est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + 0,162y = 20,3 \quad \text{sur } [0\ ;\ 60].$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Au moment de la mise en route de l'autoclave (c'est-à-dire au temps $t = 0$), la température au cœur de la conserve est égale à 21°(température dans l'atelier de stérilisation).

Déterminer une expression de $f(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

Dans la suite de l'exercice, la température, exprimée en degrés Celsius, au coeur de la conserve placée dans l'autoclave, en fonction du temps t, exprimé en minutes, est modélisée par la fonction g définiesur $[0\,;\,60]$ par

$$g(t) = 125 - 104\mathrm{e}^{-0,16t}.$$

2. **a.** Calculer $g'(t)$ où g' est la fonction dérivée de g. Étudier le signe de g' sur $[0\,;\,60]$.

b. En déduire le tableau de variations de g.

3. La courbe C_g, fournie en annexe, est la représentation graphique de la fonction g.

a. Quelle est la température au bout de 9 minutes ? On donnera la valeur arrondie au degré.

b. Pour que la stérilisation soit efficace, la conserve doit rester 3 minutes à plus de 120°.

À l'aide de la courbe C_g, déterminer au bout de combien de temps après le lancement de la stérilisation, il sera possible d'arrêter l'autoclave car la stérilisation sera alors efficace.

On laissera les traits de construction apparents et on rendra l'annexe avec la copie.

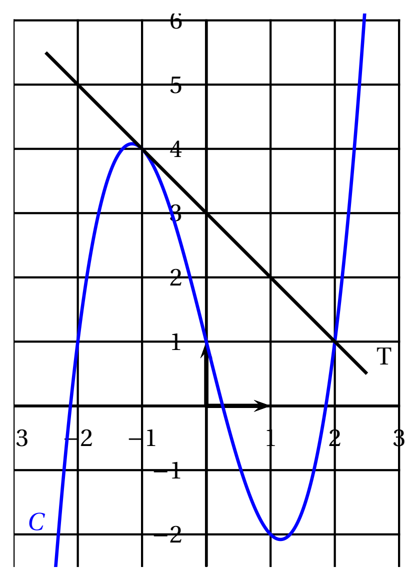
c. Retrouver ce résultat en résolvant une inéquation.

EXERCICE 3 — 4 points

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. La courbe C ci -contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. La droite T est la tangente à la courbe C au point d'abscisse -1.

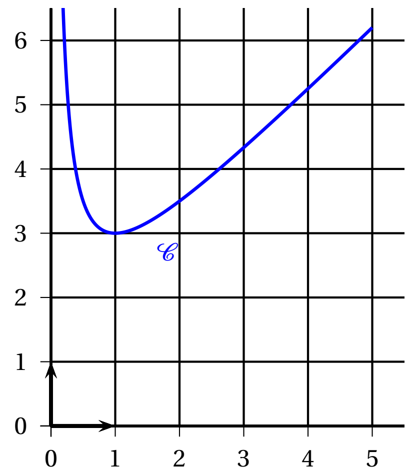
Question : par lecture graphique, donner les valeurs de $f(-1)$ et de $f'(-1)$ où f' est la fonction dérivée de f.



2. La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle [0,5 ; 5] par :

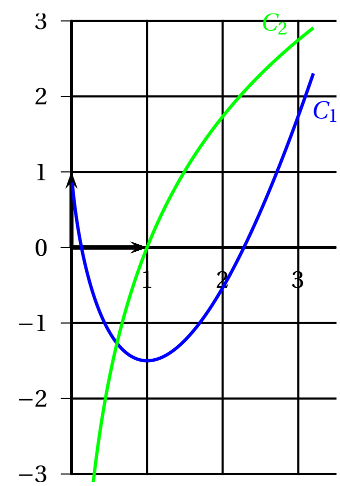
$$g(x) = \frac{1}{x} + x + 1.$$

Question : déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.



3. Le graphique ci-contre donne deux courbes C_1 et C_2.
Ces deux courbes sont représentatives de deux fonctions définies sur]0 ; $+\infty$[: une fonction h et une de ses primitives H.

Question : indiquer, en justifiant votre réponse, laquelle des deux courbes C_1 ou C_2 est la courbe représentative de la fonction H.



EXERCICE 4 **5 points**

À partir du 1er janvier 2014, Alice a décidé de travailler son endurance à la course à pied. Pour cela, elle va s'entraîner régulièrement. Tous les mois, elle note ses performances afin d'évaluer ses progrès.

1. Alice suit d'abord l'évolution des distances parcourues. Au mois de janvier 2014, la distance qu'elle est capable de courir en une fois est égale à 10 km et cette distance courue en une fois augmente tous les mois de 6 %.
Pour tout entier naturel n, on appelle d_n la distance, en kilomètres, qu'Alice est capable de courir en une fois le n-ième mois après le mois de janvier 2014. Ainsi, on considère que $d_0 = 10$.
   - **a.** Justifier que $d_1 = 10,6$.
   - **b.** Quelle est la nature de la suite (d_n). Exprimer, pour tout entier naturel n, d_n en fonction de n.
   - **c.** Déterminer la distance qu'est capable de courir Alice en une fois au mois de septembre 2014.
   On donnera la valeur arrondie à 0,1 km.
   - **d.** Au bout de combien de mois Alice sera-t-elle capable de courir en une fois 25 km ? Justifier.
2. À partir du mois de septembre 2015, Alice s'intéresse au temps mis pour courir les 10 premiers kilomètres de sa course à pied. Son temps pour les 10 premiers kilomètres, au mois de septembre 2015, est de 60 minutes. On admet que ce temps diminue tous les mois de 2 %, et cela jusqu'en décembre 2016. Alice utilise l'algorithme suivant :

```
Variables : N entier naturel, t réel
Initialisation :
    Affecter à N la valeur 0
    Affecter à t la valeur 60
Traitement :
    Tant que t > 50
        Affecter à N la valeur N + 1
        Affecter à t la valeur 0,98 × t.
    Fin Tant que
Sortie : Afficher N, Afficher t
```

a. Que cherche à déterminer Alice avec cet algorithme ?

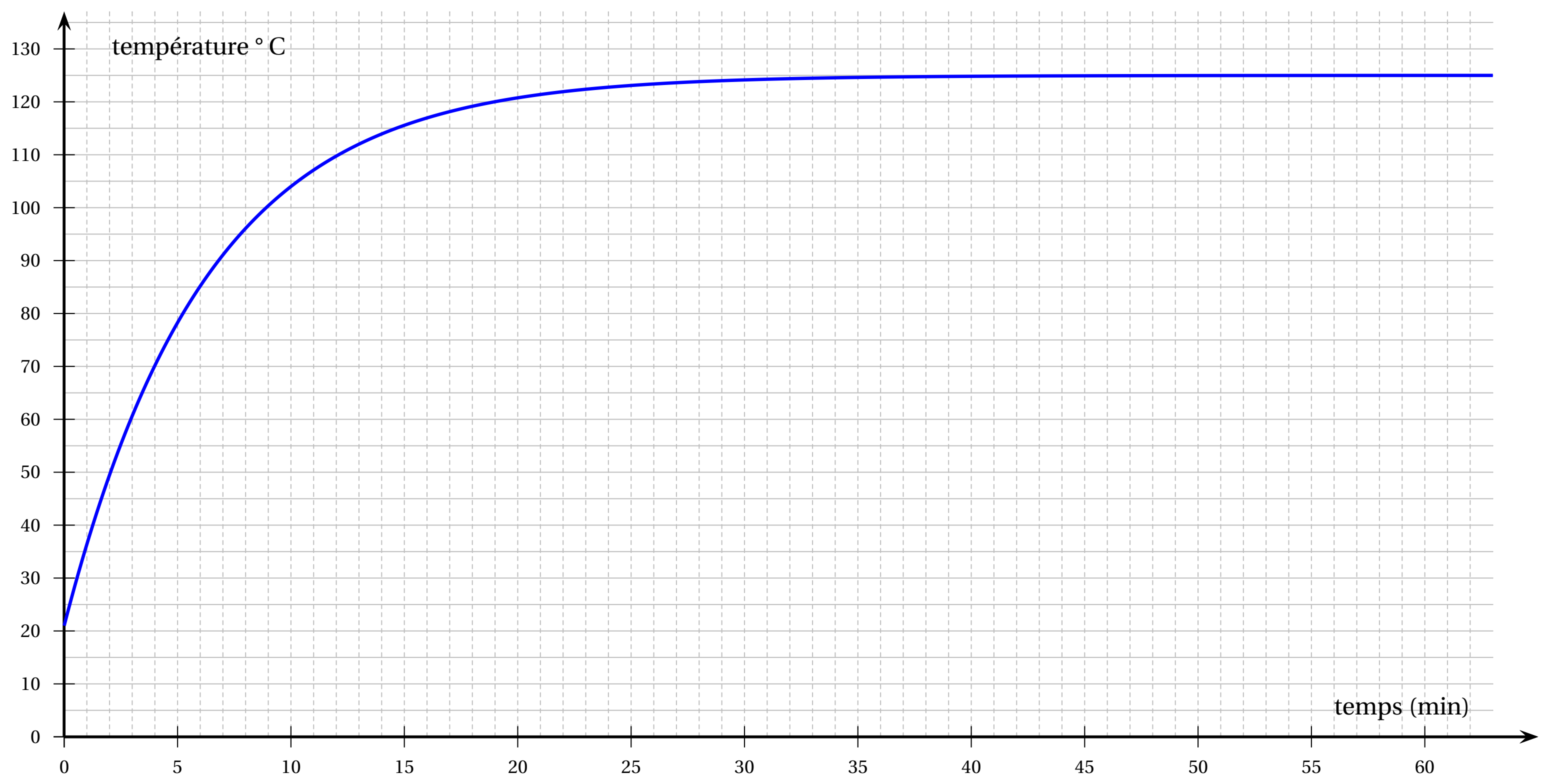
b. Recopier et compléter le tableau suivant avec les valeurs successives prises par les variables N et t lors du déroulement de l'algorithme, jusqu'à son arrêt.

Valeur de N	0	1	...			
Valeur de t (arrondie à 10^{-2})	60	58,80	...			

c. Quelles sont les valeurs affichées en sortie par l'algorithme ? Que peut en déduire Alice ?

d. Alice a pour objectif de se qualifier pour un championnat de semi-marathon, L'épreuve de qualification est aussi un semi-marathon, d'une longueur de 21 km, qui se déroulera au mois de novembre 2016. Alice peut-elle espérer se qualifier sachant que cette épreuve se court à 82 % de la vitesse qu'elle peut avoir sur les 10 premiers kilomètres de course et que le temps pour se qualifier doit être inférieur à 2 heures ? On justifiera la réponse.

Exercice 2 : annexe
Représentation graphique de la fonction g



∽ Baccalauréat STL biotechnologies Métropole–La Réunion ∾
8 septembre 2016

Calculatrice autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

EXERCICE 1 **4 points**

Une cuisson non juste de la viande de bœuf peut provoquer une intoxication alimentaire. Les bactéries en cause sont des souches d'*Escherichia coli.* Pour mieux prévoir les aptitudes de survie et de développement de cette bactérie dans les aliments, on étudie en fonction du temps la croissance de ces souches placées dans un milieu de culture. On appelle C_i la concentration en bactéries en millions par mL. Voici les résultats obtenus :

Temps t_i en minutes	0	30	60	90	120	150
Concentration C_i en millions par mL	13	16	36	108	270	785

1. On pose $y_i = \ln(C_i)$.

a. Compléter le tableau de valeurs sur l'annexe 1, en arrondissant les résultats à 10^{-2}.

b. Sur une feuille de papier millimétré, représenter le nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal avec 1 cm pour 10 min en abscisses et 2 cm pour 1 unité en ordonnées.

c. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage en arrondissant l'ordonnée à 10^{-2} puis placer le point G sur le graphique précédent.

2. On réalise un ajustement affine de ce nuage de points.

a. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement de y en t obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-4}.

b. Tracer la droite D sur le graphique de la question 1.

3. En déduire, selon ce modèle d'ajustement, la concentration en bactéries présentes dans le milieu de culture au bout de 4 heures. Donner le résultat arrondi au million de bactéries par mL.

4. Dans cette question, on considère que la concentration (en millions par mL) en bactéries présentes à l'instant t (en minutes) dans le milieu de culture est donnée par

$$C(t) = 8,6\mathrm{e}^{0,0287t}.$$

Déterminer au bout de combien de temps cette concentration dépassera le milliard de bactéries par mL. Donner le résultat en heures et minutes, arrondi à la minute.

EXERCICE 2 **4 points**

À l'Île de La Réunion, la variété d'ananas la plus cultivée est l'ananas Victoria.
L'exportation de cette variété d'ananas vers la métropole est en plein essor. Une coopérative réunionnaise se consacre exclusivement à l'exportation d'ananas Victoria vers la métropole.
Entre 2012 et 2015, la coopérative a augmenté ses exportations de 10,5 % par an, En 2015, les exportations ont atteint 1 100 tonnes.
Le but de cet exercice est d'étudier deux modélisations différentes de l'évolution de la quantité d'ananas Victoria exportés par cette coopérative.

1. Dans cette question, on s'intéresse à une première modélisation : on suppose qu'après 2015, les exportations vont continuer à progresser de 10,5 % par an. Ainsi, la situation peut être modélisée par une suite géométrique (u_n) où pour tout entier naturel n, u_n est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en $2015+n$. On a : $u_0 = 1\,100$.

- **a.** Déterminer la quantité, arrondie à la tonne, d'ananas que la coopérative peut prévoir d'exporter en 2016.
- **b.** Déterminer en quelle année on peut prévoir que la quantité d'ananas exportés par cette coopérative dépassera 2 000 tonnes. On précisera la démarche utilisée.
- **c.** Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Dans cette question, l'exportation des ananas est modélisée par la suite (v_n), définie par : $v_0 = 1\,100$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,7v_n + 477$ où v_n est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en $2015+n$.

On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables :	V nombre réel, N, K entiers
Entrée :	Saisir N
Traitement :	
	V prend la valeur 1 100
	Pour K variant de 1 à N
	V prend la valeur $0,7\times V+477$
	Fin pour
Sortie :	Afficher V

On saisit $N = 3$.

- **a.** Quelle valeur est affichée par cet algorithme en sortie? Interpréter ce résultat en termes d'exportation d'ananas,
- **b.** On dispose du tableau de valeurs suivant :

N	5	10	15	20	25	30
v_N	1 508	1 576	1 588	1 589	1 590	1 590

Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (v_n)?

3. Entre la modélisation proposée à la question 1 et celle proposée à la question 2, laquelle privilégier? Pourquoi?

EXERCICE 3 — 5 points

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, on teste le fonctionnement d'une machine à embouteiller de l'eau. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production, associe le volume d'eau en litres qu'elle contient. On admet que, lorsque la machine est bien réglée, X suit la loi normale d'espérance $\mu = 1,5$ et d'écart type $\sigma = 0,01$.
On arrondira les probabilités au centième.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité $P(X \leqslant 1,49)$.

Une bouteille d'eau est conforme lorsqu'elle contient entre 1,48 et 1,52 litre d'eau.

2. On prélève au hasard une bouteille d'eau de la production.

- **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que cette bouteille d'eau soit conforme aux normes de l'entreprise,
- **b.** Comment aurait-on pu obtenir ce résultat sans calculatrice?

3. Le directeur de l'usine souhaite que la proportion de bouteilles d'eau conformes soit égale à 97 %. Les techniciens effectuent un nouveau réglage de la machine à embouteiller et affirment que la proportion de bouteilles d'eau conformes est bien égale à 97 %. Un contrôle sur un échantillon de 500 bouteilles est effectué, pour juger de l'efficacité de ce réglage,

  a. Déterminer, en arrondissant les bornes à 10^{-3}, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de bouteilles d'eau conformes dans un échantillon de taille 500.

  b. Parmi les 500 bouteilles de l'échantillon, on observe que 476 sont conformes.
  Cette observation remet-elle en question l'efficacité du réglage ? Justifier la réponse.

4. On veut mesurer la durée de bon fonctionnement de machines à embouteiller sur le point d'être livrées à l'usine.
On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard parmi les machines sur le point d'être livrées, associe sa durée de vie en jours avant une défaillance, On suppose que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans cette livraison prévue n'ait pas de défaillance avant l'instant t, exprimé en jours, est $p(T \geqslant t) = \mathrm{e}^{-0,005t}$.

  a. Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne plus de 200 jours sans défaillance.

  b. Déterminer le réel t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne moins de t jours sans défaillance soit égale à $0,2$. Arrondir à l'unité.

EXERCICE 4 **7 points**

On injecte un antibiotique en perfusion au rythme de $0,32$ milligramme par minute. On suppose que cet antibiotique n'était pas présent dans le sang avant cette perfusion. La quantité d'antibiotique présent à tout instant est modélisée par une fonction f.
Lorsque t représente le temps écoulé, en minutes, depuis le début de la perfusion, $f(t)$ représente la quantité, en milligrammes, d'antibiotique présent dans le sang.

Partie A

On admet que la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,004y = 0,32,$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0~;~+\infty[$.

2. **a.** Quelle est la valeur de $f(0)$?

  b. En déduire une expression de $f(t)$ sur $[0~;~+\infty[$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = -80\mathrm{e}^{-0,004t} + 80.$$

1. Calculer $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. En déduire les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.
On a tracé, dans le repère donné en annexe 2, la courbe représentative C de la fonction f et la droite D, asymptote à la courbe C en $+\infty$.

2. Donner, à l'aide du graphique, la limite de la fonction f en $+\infty$. Cette valeur est appelée quantité limite de l'antibiotique présent dans le sang.

3. Le débit de perfusion est satisfaisant si 90 % de la quantité limite de l'antibiotique est, arrivée dans le sang au bout de 10 heures. Déterminer, de deux façons différentes, si le débit de perfusion est satisfaisant :

a. À l'aide du graphique (on laissera apparents les traits de construction utiles sur l'annexe 2 à rendre avec la copie).

b. Sans le graphique,

4. On admet que la quantité moyenne de l'antibiotique présente dans le sang pendant les cinq premières heures de perfusion est égale à $\dfrac{1}{300}\displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Démontrer que la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$F(t) = 20\,000\mathrm{e}^{-0,004t} + 80t$$

est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

b. En déduire la valeur de : $I = \displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}t$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième. Quelle interprétation graphique peut-on donner de l'intégrale I ?

c. Déterminer une valeur approchée, au dixième de milligramme près, de la quantité moyenne de l'antibiotique présent dans le sang pendant les 5 premières heures de perfusion.

ANNEXES
À rendre avec la copie

Annexe 1 (exercice 1)

Temps t_i en minutes	0	30	60	90	120	150
y_i	2,56					

Annexe 2 (exercice 4) : représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = -80\mathrm{e}^{-0,004t} + 80.$$