Baccalauréat STL spécialité biotechnologies
Antilles-Guyane 4 septembre 2020

L'usage de la calculatrice avec le mode examen activé est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

EXERCICE 1 — 4 points

Dans un centre avicole, les œufs sont pesés et classés suivant quatre catégories avant expédition :

- XL : pour les très gros œufs d'un poids supérieur ou égal à 73 g ;
- L : pour les gros œufs d'un poids supérieur ou égal à 63 g et strictement inférieur à 73 g ;
- M : pour les œufs moyens d'un poids supérieur ou égal à 53 g et strictement inférieur à 63 g ;
- S : pour les petits œufs dont le poids est strictement inférieur à 53 g.

On note G la variable aléatoire qui prend pour valeur la masse en grammes d'un œuf.
On admet que G suit une loi normale de moyenne $\mu = 60$ et d'écart type σ.

1. Sachant que $P(52,8 \leqslant G \leqslant 67,2) = 0,95$, déterminer la valeur de σ.

Pour la suite de l'exercice, on arrondit : $\sigma = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

2. On prélève un œuf au hasard dans ce centre.

   a. Déterminer la probabilité que cet œuf soit un « œuf moyen ».

   b. Déterminer la probabilité que cet œuf soit un « très gros œuf ».

3. Ce centre avicole affirme que le nombre d'œufs de catégorie L correspond à 37 % du nombre total d'œufs.
Sur un lot choisi au hasard de 35 douzaines d'œufs non triés, on comptabilise 168 œufs de catégorie L.
Avec un risque d'erreur de 5 %, l'affirmation du centre avicole est-elle remise en cause ?

> Rappel :
> L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :
> $$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$
> lorsque la proportion p dans la population est connue.

EXERCICE 2 — 5 points

Une infection est traitée en injectant un médicament par voie intraveineuse.
À l'instant $t = 0$, on injecte à un patient hospitalisé une dose de 3 Unités Internationales (UI) du médicament qui se diffuse instantanément dans le sang. Le médicament est progressivement éliminé. La quantité de médicament diminue de 20 % par heure. Pour conserver une efficacité thérapeutique, on injecte toutes les heures une dose de 2 UI au patient, en évitant un surdosage médicamenteux. On modélise cette situation à l'aide d'une suite u. On note u_n la quantité de médicament en UI présente dans le sang n heures après la première injection. On a donc $u_0 = 3$.

PARTIE A

1. Montrer que $u_1 = 4,4$.

2. On réalise une feuille de tableur comme ci-contre.

   Parmi les formules proposées, reporter sur votre copie celle entrée en B3, qui, recopiée vers le bas, donne les valeurs successives de u_n :

   — formule 1 : = 0,2*B2 + 2,

   — formule 2 : = 0,8 * B2 + 2,

   — formule 3 : = 2*A3 + 3.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	4,4
4	2	5,52
5	3	
6	4	

3. La suite u est-elle géométrique ? Justifier.

PARTIE B

La quantité de médicament en UI présente dans le sang n heures après la première injection est donc donnée par la relation $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 2$ avec $u_0 = 3$.
On considère la suite v définie pour tout n entier naturel par : $v_n = u_n - 10$.
On a alors : $v_0 = -7$. On admet que la suite v est une suite géométrique de raison 0,8.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = -7 \times 0,8^n + 10$.
2. Déterminer la limite de la suite u. Comment interpréter ce résultat ?
3. Un laboratoire préconise de ne pas dépasser une quantité de 8 UI de ce médicament dans le sang. Déterminer le nombre maximal d'injections que l'on peut effectuer.

EXERCICE 3 **6 points**

Les parties peuvent être traitées de manière indépendante.

On se propose d'étudier le refroidissement du café. On dispose d'une tasse de café à 100 °C que l'on place dans une salle où règne une température constante de 20 °C.

PARTIE A

On réalise l'expérience en mesurant la température du café, notée θ, contenu dans la tasse à différents instants t. Les résultats sont notés dans le tableau suivant :

Temps en minutes : t	0	1	2	5	12	15	20	35	60
Température en °C : θ	100	90	85	70	50	42	35	27	20

Afin de réaliser un ajustement affine, on pose : $z = \ln\theta$. On obtient alors :

Temps en minutes : t	0	1	2	5	12	15	20	35	60
$z = \ln\theta$	4,605	4,500	4,443	4,248	3,912	3,738	3,555	3,296	2,996

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en t. On arrondira les coefficients à 10^{-4}.
2. On considérera que la droite d'ajustement a pour équation $z = -0,027t + 4,37$.

   En utilisant ce modèle, justifier que la température de la tasse de café au bout de 10 minutes est d'environ 60 °C.
3. Ce modèle est-il pertinent pour estimer la température du café au bout de 2 heures ?

PARTIE B

D'après la Loi de Newton, l'équation différentielle (E) : $y'(t) + 0,1y(t) = 2$ permet de modéliser la température du café (en °C) en fonction du temps t (en minutes).

1. Résoudre cette équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière f définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 100$.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $f(t) = 20+80\text{e}^{-0,1t}$.

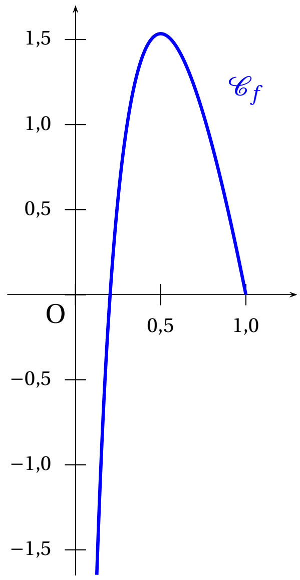
3. Déterminer la température du café contenu dans la tasse au bout de 10 minutes. On arrondira au degré près.
4. Résoudre l'inéquation $20+80\text{e}^{-0,1t} < 35$. Interpréter ce résultat.
5. On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-0,1t} = 0$. Déterminer la limite de f. Comment interpréter ce résultat pour l'expérience réalisée ?

EXERCICE 4 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ 1]$ par

$$f(x) = 5\ln(x) - 10x + 10.$$

1. On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère.
   a. Quelle conjecture peut-on faire quant aux variations de f sur $]0\ ,\ 1]$?
   b. Quelle(s) conjecture(s) peut-on faire concernant le maximum de f sur $]0, 1]$?
   c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en 0.



2. Démontrer que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ 1]$, la dérivée de f est définie par :

$$f'(x) = \frac{5(1-2x)}{x}.$$

3. Démontrer les conjectures émises à la question 1.

4 . On considère l'algorithme suivant :

```
x ⟵ 0,4
M ← f(0,4)

Pour i allant de 1 à 12
    x ⟵ x + 0,05
    y ⟵ f(x)
    Si y > M
        Alors M ⟵ y

    Fin Si
Fin Pour
```

a. Recopier et compléter le tableau suivant avec les premières valeurs prises par x, y et M lors du déroulement de l'algorithme. On arrondira à 10^{-3}.

i		1	2	3	4
x	0,4				
y					
M	1,419				

b. Quelle est la valeur de la variable M à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Que représente-t-elle pour la fonction f ?