∽ Baccalauréat STL spécialité biotechnologies Métropole ∾ 6 septembre 2018

EXERCICE 1 **(6 points)**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à l'unité, sauf mention contraire.

Cyprien et Cloé, élèves de Terminale STL Biotechnologies, s'intéressent au protocole d'un examen d'imagerie médicale, qui nécessite de préparer une dose de produit radioactif. Ils disposent du tableau suivant, qui donne le nombre de milliards de noyaux radioactifs présents dans le produit préparé en fonction du temps t, exprimé en minutes.

Temps en minutes : t_i	0	20	40	60	80	100	120
Nombre de milliards de noyaux radioactifs : y_i	8 000	7 400	6 800	6 300	5 800	5 400	4 900

Au moment de son injection au patient, le produit ne doit pas contenir plus de 2 600 milliards de noyaux radioactifs. Cyprien et Cloé souhaitent alors déterminer combien de temps, une fois le produit prêt, il faut attendre avant de l'injecter au patient.

Partie A

Cyprien propose d'utiliser un ajustement affine.

1. Représenter le nuage de points de coordonnées (t_i, y_i) dans le repère fourni en **annexe, à rendre avec la copie**. Dans ce repère, 1 unité est égale à 20 minutes en abscisse et à 200 milliards de noyaux radioactifs en ordonnée.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés. On la mettra sous la forme $y = at + b$, les réels a et b étant arrondis à 0,1.
3. Cyprien admet que pendant les quatre heures suivant la préparation du produit, le nombre y de milliards de noyaux radioactifs encore présents dans le produit peut être modélisé par $y = -26t + 7900$ où t est le temps, exprimé en minutes, écoulé depuis que le produit a été préparé.
   a. Tracer la droite d d'équation $y = -26t + 7900$ sur le graphique précédent.
   b. Cyprien utilise alors ce modèle pour déterminer, combien de temps, une fois le produit prêt, il faut attendre avant de l'injecter au patient. Quel temps Cyprien trouve-t-il ?
   c. Une nouvelle mesure est fournie à Cyprien : au bout de 240 minutes, le nombre de milliards de noyaux radioactifs présents dans le produit préparé est égal à 3 100. Cette mesure remet-elle en cause le modèle utilisé par Cyprien ? Pourquoi ?

Partie B

Cloé remet en cause le modèle utilisé par Cyprien. L'examen exploitant un produit radioactif, elle préfère utiliser un ajustement exponentiel : le nombre y de milliards de noyaux radioactifs encore présents dans le produit peut être modélisé par $y = A_0\mathrm{e}^{-kt}$ où t est le temps, exprimé en minutes, écoulé depuis que le produit a été préparé, A_0 et k étant deux réels strictement positifs.

1. Proposer une démarche qui permette de déterminer des valeurs prises par les réels A_0 et k.
2. Dans ce qui suit, on prend $A_0 = 8000$ et $k = 0{,}0039$.

   Cloé utilise alors ce modèle pour déterminer, combien de temps, une fois le produit prêt, il faut attendre avant de l'injecter au patient. Quel temps Cloé trouve-t-elle ?

EXERCICE 2 **(7 points)**

Les deux parties de cet exercice peuvent se traiter de façon indépendante.

Partie A

En 2017, une étude menée dans une ville a montré que la consommation d'eau par an et par habitant s'élevait à $50\,\text{m}^3$. On suppose que, dans les années qui suivront, cette consommation baissera de 2,1 % par an.

1. On considère l'algorithme suivant :

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 50$
Tant que $u > 47$
$u \leftarrow u \times 0,979$
$n \leftarrow n+1$
Fin Tant que
$n \leftarrow n+2017$

   a. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

   b. Interpréter ce résultat en termes de consommation d'eau par an et par habitant dans cette ville.

2. On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la consommation d'eau, en m^3, par an et par habitant, dans cette ville en $2017+n$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   c. Avec ce modèle, quelle consommation d'eau peut-on prévoir par an et par habitant en 2021 ?
   On arrondira à $0,1\,\text{m}^3$.

3. On s'intéresse à la consommation totale d'eau par habitant depuis le début de l'année 2017.
   Déterminer à partir de quelle année cette consommation totale d'eau dépassera $500\,\text{m}^3$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}.

On sait qu'en 2017, 37 % des logements de la ville étaient équipés de systèmes de réduction de la consommation d'eau (robinets mousseurs, récupérateurs d'eau de pluie, ...).

1. On considère un échantillon de 1 000 logements pris au hasard parmi les logements de la ville, suffisamment nombreux pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de logements de l'échantillon qui étaient équipés de systèmes de réduction de la consommation d'eau en 2017.

   a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser les paramètres de cette loi.

   b. Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 400 logements dans l'échantillon qui étaient équipés de tels systèmes de réduction de la consommation d'eau en 2017 ?

2. On décide d'approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de paramètres $\mu= 370$ et $\sigma= 15,27$.

   a. Justifier les valeurs choisies pour μ et σ.

   b. Calculer la probabilité $P(Y \leqslant 350)$. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte.

EXERCICE 3 **(7 points)**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Un antibiotique est une substance chimique organique inhibant ou tuant des bactéries pathogènes.

Partie A

Un laboratoire affirme que 48 % de toutes les souches bactériennes sont résistantes aux antibiotiques.
Dans un échantillon de 50 souches bactériennes prises au hasard, on constate que 29 souches sont résistantes. Cela remet-il en cause l'affirmation du laboratoire ? Justifier.

Partie B

On injecte un antibiotique à un patient. On modélise cette situation par une fonction f qui, à tout temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'injection, associe la concentration, exprimée en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, de l'antibiotique dans le sang du patient.
Cette fonction f est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{8t}{t^2+1}.$$

1. On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

a. Interpréter la valeur de la limite pour la courbe représentative de la fonction f.

b. Interpréter la valeur de la limite dans le contexte de l'exercice.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. On admet que pour tout réel t positif ou nul, on a : $f'(t) = \dfrac{8(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}$.

Étudier le signe de f' sur $[0~,~+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f.

b. Au bout de combien de temps après l'injection la concentration de l'antibiotique est-elle maximale ? Préciser cette concentration maximale en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

3. En antibiothérapie, on définit la CMI comme la concentration minimale d'antibiotique permettant d'empêcher la multiplication bactérienne. La CMI de l'antibiotique injecté est égale à 2,4 $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

a. Montrer que, pour tout réel t positif ou nul, $f(t) - 2,4 = \dfrac{-2,4t^2+8t-2,4}{t^2+1}$.

b. Étudier le signe de cette expression sur l'intervalle $[0~,~+\infty[$.

c. Montrer que la concentration de l'antibiotique injecté est supérieure à sa CMI pendant 2 h 40.

4. **a.** Vérifier que la fonction F définie sur $[0~,~+\infty[$ par $F(t) = 4\ln(t^2+1)$ est une primitive de f sur cet intervalle.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{12} f(t)\,\text{d}t$.

c. On admet que la valeur moyenne de la concentration de l'antibiotique en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ durant les douze premières heures après l'injection est égale à $\dfrac{1}{12}J$.

Déterminer cette valeur moyenne, arrondie au centième de $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

Exercice 1 : annexe à rendre avec la copie