∽ Baccalauréat STL Biotechnologies 18 juin 2014 ∾
Antilles-Guyane

EXERCICE 1 **7 points**

Des scientifiques étudient la croissance de plants de tomates d'une variété donnée après plantation. Ils ont établi que la hauteur des plants en centimètres peut être modélisée en fonction du temps par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{120}{5\mathrm{e}^{-0,08t}+1}$$

où t est le temps en jours après le jour de plantation.

PARTIE A : ÉTUDE DE LA FONCTION *f*

1. Calculer la hauteur des plants le jour où ils sont plantés, c'est-à-dire $f(0)$.
2. **a.** Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ (on rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,08t} = 0$).
   b. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f. Tracer cette asymptote sur une feuille de papier millimétré fournie (*échelle :* 1 *unité pour* 10 *jours en abscisse et* 1 *unité pour 10*cm *en ordonnée). Note : le graphique sera complété par la suite.*
   c. Comment cela se traduit-il pour la croissance d'un plant ?
3. Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(t) = \dfrac{48\mathrm{e}^{-0,08t}}{\left(5\mathrm{e}^{-0,08t}+1\right)^2}$.
4. Étudier le signe de f' sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
6. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f donné en **Annexe 1** (arrondir à 10^{-1} près).
7. Tracer la courbe représentative de f sur le papier millimétré.

PARTIE B : EXPLOITATION

1. Donner une inéquation permettant de déterminer au bout de combien de jours le plant mesurera plus de 30 cm de haut.
2. Résoudre cette inéquation (*on donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à l'unité du résultat*).
3. Retrouver le résultat du **2.** en utilisant la courbe représentative de f ou la calculatrice. (Dans les deux cas, on explicitera la démarche suivie).

PARTIE C : ALGORITHME

```
Initialisations
t prend la valeur 0
f prend la valeur 20

Traitement
Tant que f < 30
        t prend la valeur t + 1
        f prend la valeur 120 / (5e^(-0,08t) + 1)
Fin Tant que

Sortie
Afficher t
```

1. L'entrée dans la boucle **Tant que** de cet algorithme dépend d'une condition. Quelle est cette condition ? Quand sortira-t-on de cette boucle ?
2. Quelles seront les trois premières valeurs de la variable t ? Donner les valeurs correspondantes de la variable f. (*Les résultats seront arrondis à l'unité.*)
3. Quelle sera la valeur de t affichée à la fin de l'algorithme ? Que représente concrètement cette valeur ?

EXERCICE 2 **3 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2x\ln(x) + x.$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de cette fonction dans un repère orthonormé est donnée en **Annexe 2**.

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x^2\ln(x)$ est une primitive de f.
2. Calculer $A = \displaystyle\int_1^2 (2x\ln(x) + x)\,\mathrm{d}x$.

   (*on donnera la valeur exacte du résultat, puis une valeur approchée à* 10^{-2} *près*)
3. À quoi cette intégrale correspond-elle sur le graphique de l'**Annexe 2** ?

   Illustrer la réponse en hachurant la zone correspondante du graphique.

EXERCICE 3 **6 points**

Dans cet exercice, les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Production de l'antibiotique spiramycine.

L'espèce *Streptomyces ambofaciens* a été sélectionnée pour sa production de spiramycine. Cet antibiotique est obtenu par la fermentation de la *Streptomyces ambofaciens* en bioréacteur.
Afin de prévoir au mieux la production de cet antibiotique, on cherche le développement de la *Streptomyces ambofaciens* dans le bioréacteur.

PARTIE A :

À $t = 0$ heure, la concentration de *Streptomyces ambofaciens* est mesuré à 3,10 g/l. Puis, à $t = 1$ h, elle est mesurée à 3,22 g/l.
En conséquence dans cette partie, on suppose que la concentration augmente de 4 % par heure.

On note : c_0 la concentration au temps $t = 0$, et $c_0 = 3,10$.
c_1 la concentration au temps $t = 1$
...
c_n la concentration au temps $t = n$

Tous les résultats de cette partie seront arrondis au centième.

1. Calculer c_1, c_2 et c_3.
2. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.
3. En déduire la nature de la suite (c_n) et préciser sa raison.
4. Exprimer c_n en fonction de n.

5. Si la fermentation se produit pendant 24 heures, calculer la concentration *Streptomyces ambofaciens* au bout de 24 h.

PARTIE B :

Après 24 h le milieu est renouvelé au sein du bioréacteur, à partir de ce moment on obtient le relevé suivant :

Heures	24	29	32	34	36	38	40
Rang de l'heure : x_i	0	5	8	10	12	14	16
Concentration de *Streptomyces ambofaciens* : y_i	7,95	11,05	12,05	13,45	14,15	15,45	16,75

1. Dans un repère orthogonal, construire un nuage de points $M(x_i\ ;\ y_i)$. En abscisse, pour le rang de l'heure, on prendra comme échelle 1 cm pour 2 heures et en ordonnée 1 cm pour 2 g/l; on positionnera l'intersection des axes de coordonnées au point de coordonnées (0; 7).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. *On arrondira les coordonnées au dixième.*

   Placer G dans le repère.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés. *Les coefficients seront arrondis à* 10^{-2} *près.*
4. On décide d'ajuster le nuage avec la droite (D) d'équation $y = 0,53x + 8,03$.

   a. Tracer la droite (D) dans le repère précédent.

   b. En utilisant cet ajustement affine, estimer par une méthode graphique la concentration de *Streptomyces ambofaciens* au bout de 48 h (la réponse sera accompagnée de tracés sur le graphique).

   c. À partir de quelle heure la concentration de *Streptomyces ambofaciens* dépassera-t-elle 30 g/l?

EXERCICE 4 — 4 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3}près.

PARTIE A :

Une entreprise agroalimentaire dispose d'un parc de machines d'ensachage toutes identiques.
La durée de vie en année d'une machine d'ensachage est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On rappelle que : $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$
Sur l'**Annexe 3**, on donne la courbe de la fonction représentative f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

1. Caractérisation de la loi.

   a. Représenter graphiquement sur l'**Annexe 3** la probabilité $P(X > 20)$.

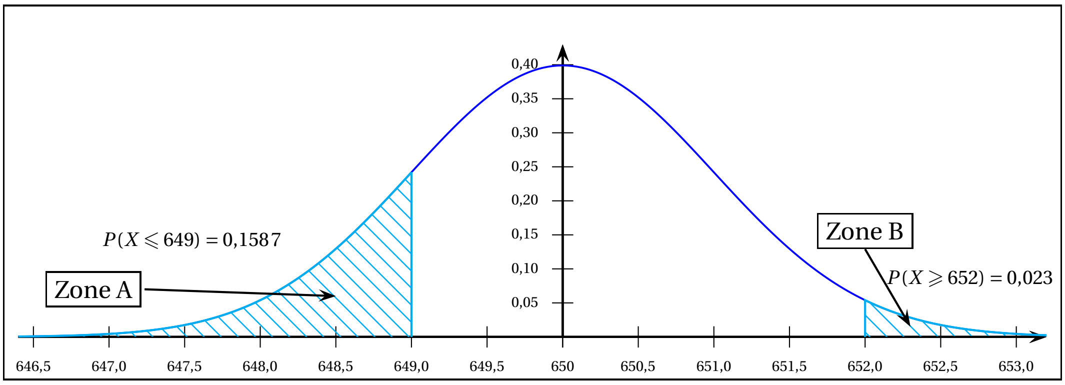
   b. Comment peut-on déduire du graphique la valeur de λ ?

Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,1$.

2. Quelle est la probabilité qu'une machine d'ensachage tombe en panne entre la dixième et la vingtième année ?

PARTIE B :

L'entreprise lance une production de paquets de préparation pour pancakes. Les paquets doivent contenir 650 g de préparation. On considère qu'un paquet est commercialisable s'il contient entre 648 g et 652 g.
On considère que la quantité Q, exprimée en grammes (g), de préparation réellement introduite dans les paquets par une machine d'ensachage suit une loi normale d'espérance $\mu = 650$ et d'écart-type $\sigma = 1$.
A l'aide d'un logiciel, on obtient les résultats suivants :



1. Déterminer la probabilité qu'un paquet de préparation pour pancakes pris au hasard dans la production a pour masse entre 649 g et 652 g.

2. Calculer la probabilité qu'un paquet de préparation pour pancakes pris au hasard dans la production a pour masse moins de 648 g.

PARTIE C :

Les réglages de la machine d'ensachage ont été modifiés dans l'objectif d'obtenir une proportion $p = 97\,\%$ de paquets de préparation commercialisables. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un premier échantillon de 400 paquets fabriqués.

1. En supposant que cet objectif a été atteint déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de paquets de préparation commercialisables dans un échantillon de taille 400.

2. Parmi les 400 paquets de l'échantillon, 381 sont commercialisables.

   En utilisant l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on estimer au seuil de 95 % que l'objectif a été atteint ?

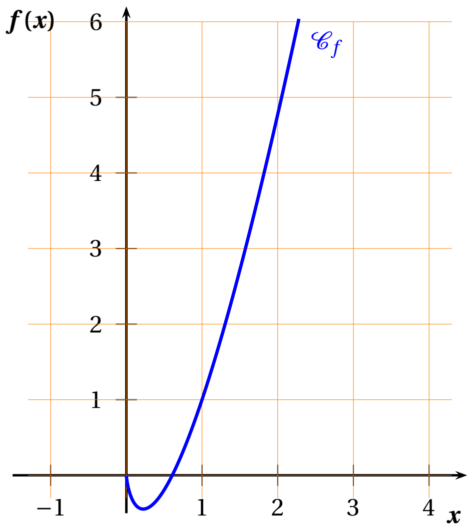
ANNEXE 1 À rendre avec la copie

EXERCICE 1 : Tableau de valeurs de la fonction f

t	0	10	20	30	40	50	60
$f(t)$							

ANNEXE 2 À rendre avec la copie

EXERCICE 2 : Courbe représentative de la fonction f



ANNEXE 3 À rendre avec la copie

EXERCICE 4 : Courbe représentative de la fonction f