

# Baccalauréat STMG Polynésie

## 12 septembre 2014 Correction

Durée : 3 heures

### EXERCICE 1

**6 points**

Pour une nouvelle mine de plomb, les experts d'une entreprise modélisent le chiffre d'affaires (en milliers d'euros) avec la fonction  $f$  définie sur  $[0; 2\,000]$  par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1\,000}$$

où  $x$  désigne la masse de plomb vendue, exprimée en tonnes.

La représentation graphique de cette fonction est tracée en **annexe 1** qui sera à rendre avec la copie.

#### Partie A

1. On note  $f'$  la dérivée de  $f$  sur  $[0; 2\,000]$ , montrons que :  $f'(x) = \frac{x^2 + 2\,000x}{(x + 1\,000)^2}$ .

$$f = \frac{u}{v} \text{ par conséquent } f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

En posant  $u(x) = x^2$  et  $v(x) = x + 1\,000$ , nous obtenons  $u'(x) = 2x$  et  $v'(x) = 1$ .

$$\text{Par suite } f'(x) = \frac{2x(x + 1\,000) - x^2}{(x + 1\,000)^2}.$$

En simplifiant, nous obtenons bien  $f'(x) = \frac{x^2 + 2\,000x}{(x + 1\,000)^2}$ .

2. Déterminons le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; 2\,000]$  ;

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2\,000x}{(x + 1\,000)^2} = \frac{x(x + 2\,000)}{(x + 1\,000)^2}.$$

$x \geq 0$  par conséquent  $f'(x) \geq 0$  comme produit et quotient de nombres réels positifs.

Si pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) > 0$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ . Sur  $]0; 2\,000[$ ,  $f'(x) > 0$ , il en résulte que  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle.

Dressons le tableau de variations de  $f$ .

$x$	0	2000
$f'(x)$	+	
Variations de $f$		
	0	$\frac{4\,000}{3}$

3. Résolvons l'équation  $f(x) = 500$  sur  $[0; 2\,000]$ . Le dénominateur n'est jamais nul sur cet intervalle.

$$\frac{x^2}{x + 1\,000} = 500 \quad x^2 = 500(x + 1\,000) \quad x^2 - 500x - 500\,000 = 0$$

Calculons  $\Delta$  :  $\Delta = (-500)^2 - 4(-500\,000) = 2\,250\,000$ .  $\Delta > 0$  le trinôme admet 2 racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{500 - \sqrt{2\,250\,000}}{2} = \frac{500 - 1\,500}{2} = -500 \quad x_2 = \frac{500 + 1\,500}{2} = 1\,000$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = 500$  est  $\{1\,000\}$ .

*remarque* L'autre solution possible n'appartient pas à l'intervalle  $[0; 2\,000]$ , elle ne peut donc être dans l'ensemble solution

4. Que signifie ce résultat pour l'entreprise ?

Lorsque l'entreprise vend 1 000 tonnes de plomb, le chiffre d'affaires s'élève à 500 000 euros.

**Partie B**

Les coûts d'extraction et de traitement sont donnés (en milliers d'euros) par la fonction linéaire :

$$g(x) = 0,6x$$

où  $x$  désigne la masse de plomb vendue, exprimée en tonnes.

- la droite d'équation  $y = 0,6x$  est tracée sur le graphique donné en **annexe 1 à rendre avec la copie**.
- Les géologues ont prévu d'extraire 1 400 tonnes de plomb.

**Graphiquement** Le chiffre d'affaires est inférieur au coût puisque le point d'abscisse 1 400 appartenant à la droite représentant les coûts est au dessus du point de même abscisse appartenant à la courbe représentant le chiffre d'affaires.

**Par le calcul** calculons  $f(1400) = \frac{1400^2}{1000 + 1400} \approx 816,67$  et  $g(1400) = 0,6 \times 1400 = 840$

Il en résulte que pour 1 400 tonnes les coûts sont supérieurs au chiffre d'affaires.

*remarque* On pourrait s'intéresser à partir de quelle quantité, le chiffre d'affaires est supérieur aux coûts.

Pour ce faire, résolvons  $f(x) \geq 0,6x$ .

$$\frac{x^2}{x+1000} \geq 0,6x \quad \frac{x^2}{x+1000} - 0,6x \geq 0 \quad \frac{x^2 - 0,6x(x+1000)}{x+1000} \geq 0 \quad \frac{0,4x^2 - 60x}{x+1000} \geq 0 \quad \frac{0,4x(x-1500)}{x+1000} \geq 0$$

$\frac{0,4x}{x+1000} > 0$ , le signe de la fraction est donc celui de  $x - 1500$ .

Le chiffre d'affaires est supérieur au coût lorsque  $x > 1500$ .

**EXERCICE 2****7 points**

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.**

D'après l'INSEE, l'espérance de vie à la naissance est passée pour les hommes de 59,9 ans en 1946 à 78,5 ans en 2012. Pour les femmes, elle est passée de 65,2 ans à 84,9 ans durant la même période.

**Première partie**

On se propose ici de modéliser l'évolution de l'espérance de vie pour les hommes par la suite arithmétique  $(U_n)$  de premier terme  $U_0 = 59,9$  et de raison  $r = 0,25$ .

- Calculons  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  qui correspondent aux années 1947, 1948 et 1949.

$$U_1 : U_1 = 59,9 + 0,25 = 60,15$$

$$U_2 : U_2 = 60,15 + 0,25 = 60,40$$

$$U_3 : U_3 = 60,40 + 0,25 = 60,65$$

- Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$  est  $u_n = u_0 + nr$ .

Il en résulte  $U_n = 59,9 + 0,25n$ .

- Déterminons  $U_{66}$ . Remplaçons  $n$  par 66,  $U_{66} = 59,9 + 0,25 \times 66 = 76,4$ .

- Entre 1946 et 2012, l'espérance de vie a augmenté de  $(78,5 - 59,9)$  ans c'est-à-dire de 18,6 ans en 66 ans donc en moyenne de  $\frac{18,6}{66} \approx 0,28$  ans ou encore de 3,38 mois.

Les hommes ont, en réalité, plus de 3 mois d'espérance de vie chaque année en moyenne.

**Deuxième partie**

- Déterminons, à  $10^{-2}$  près, le taux d'évolution global de l'espérance de vie pour les hommes exprimé en pourcentage de 1946 à 2012. Le taux  $T$  est défini par  $\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$ .  $T = \frac{18,6}{59,9} \approx 0,31$

Le taux d'évolution global de l'espérance de vie pour les hommes exprimé en pourcentage de 1946 à 2012 est de 0,31 %

2. Calculons le taux d'évolution de l'espérance de vie pour les femmes exprimé en pourcentage de 1946 à 2012.

$$T_F = \frac{84,9 - 65,2}{65,2} \approx 0,30.$$

Le taux d'évolution global de l'espérance de vie pour les femmes exprimé en pourcentage de 1946 à 2012 est de 0,30 %.

Il en résulte que les hommes ont eu, à  $10^{-2}$  près, le taux d'évolution global le plus élevé durant cette période.

3. Calculons pour les hommes le taux annuel moyen, pour cette période, exprimé en pourcentage à  $10^{-2}$  près.

En appelant  $t_m$  le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi  $(1 + t_m)^{66}$  puisque l'espérance de vie a subi 66 évolutions durant cette période.

$$(1 + t_m)^{66} = 1,31 \text{ par conséquent } t_m = 1,31^{\frac{1}{66}} - 1 \approx 0,0041.$$

Le taux d'évolution moyen de l'espérance de vie pour les hommes exprimé en pourcentage de 1946 à 2012 est de 0,41 %.

**Troisième partie**

Soit l'algorithme suivant :

```

VARIABLES
n EST DU TYPE NOMBRE
A EST DU TYPE NOMBRE
B EST DU TYPE NOMBRE
T EST DU TYPE NOMBRE
DÉBUT ALGORITHME
AFFICHER « Entrez la valeur initiale ».
ENTRER A
AFFICHER « Entrez le nombre d'années »
ENTRER n
AFFICHER « Entrez la valeur finale »
ENTRER B
T PREND LA VALEUR (B - A)/A
T PREND LA VALEUR (1 + T)1/n
T PREND LA VALEUR (T - 1) × 100 AFFICHER T
FIN ALGORITHME
    
```

- Cet algorithme calcule cent fois le taux moyen d'évolution entre une grandeur A et une grandeur B après n évolutions.
- Si on choisit : A = 65,2 ; B = 84,9 ; n = 66, le résultat affiché à  $10^{-2}$  près est 0,40.

**EXERCICE 3**

**3 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste rapporte 1 point ; une réponse fausse ainsi que l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Une usine remplit des bouteilles. On admet que la variable aléatoire X, correspondant à la quantité de liquide, exprimée en cL, dans une bouteille choisie au hasard suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type 2.

- Quelle est à  $10^{-2}$  près la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard contienne une quantité de liquide inférieure ou égale à 71 cL ?

A:  0,02                      B:  0,5                      C:  0                      D:  0,98

- Quelle est, à  $10^{-2}$  près, la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard contienne une quantité de liquide qui appartient à l'intervalle [71 ; 79] ?

A:  0,02                      B:  0,95                      C:  0,98                      D:  1

3. Les responsables de l'usine ont noté, chaque jour pendant une semaine, le pourcentage de bouteilles qui contenaient une quantité de liquide n'étant pas comprise entre 71 cL et 79 cL. Ces bouteilles sont considérées comme mal remplies.

La série statistique ci-dessous donne l'évolution du pourcentage  $y_i$  de bouteilles mal remplies en fonction de  $x_i$  (rang du jour).

Rang du jour $x_i$	1	2	3	4	5	6	7
Pourcentages $y_i$	3,8	4	3,9	4,5	4,3	4,6	4,5

Une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés où les coefficients sont arrondis au centième, est :

A:  ~~$y = 3,70x + 0,13$~~       B:  ~~$y = -20,67x + 5,83$~~       C:  ~~$y = 3,7x + 0,1$~~       D:  $y = 0,13x + 3,7$

**EXERCICE 4**

**4 points**

Dans une classe de terminale STMG, les élèves se répartissent suivant le tableau ci-dessous :

	Garçons	Filles	Total
Redoublants	3	5	8
Non redoublants	6	22	28
Total	9	27	36

Pour toutes les questions on donnera les réponses à  $10^{-2}$  près.

L'univers est l'ensemble des élèves d'une classe de terminale STMG et la loi mise sur cet univers est l'équiprobabilité.

La probabilité d'un événement  $A$  est  $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$

1. Si l'on interroge un élève au hasard dans cette classe, calculons la probabilité de choisir un redoublant.

Il y a 8 redoublants dans cette classe de 36 élèves.

La probabilité de cet événement est  $\frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 0,22$ .

2. Sachant que l'on interroge une fille, calculons la probabilité de choisir une non redoublante.

Il y a 22 filles non redoublantes parmi les 27 filles. La probabilité est  $\frac{22}{27} \approx 0,81$ .

Dans cette même classe, les élèves ont choisi comme spécialité soit ressources humaines et communication soit mercatique. Après avoir choisi la fiche d'un élève au hasard, on définit les événements suivants :

- $R$  : « l'élève a choisi ressources humaines et communication »
- $M$  : « l'élève a choisi mercatique »
- $G$  : « l'élève est un garçon »
- $F$  : « l'élève est une fille »

3. L'arbre de probabilités décrivant cette situation a été complété en **annexe 2 à rendre avec la copie**.

$$P(G) = \frac{9}{36} = 0,25 \quad P(F) = \frac{27}{36} = 0,75$$

4. La probabilité de choisir une fille qui est en ressources humaines et communication est  $P(F \cap R)$ .

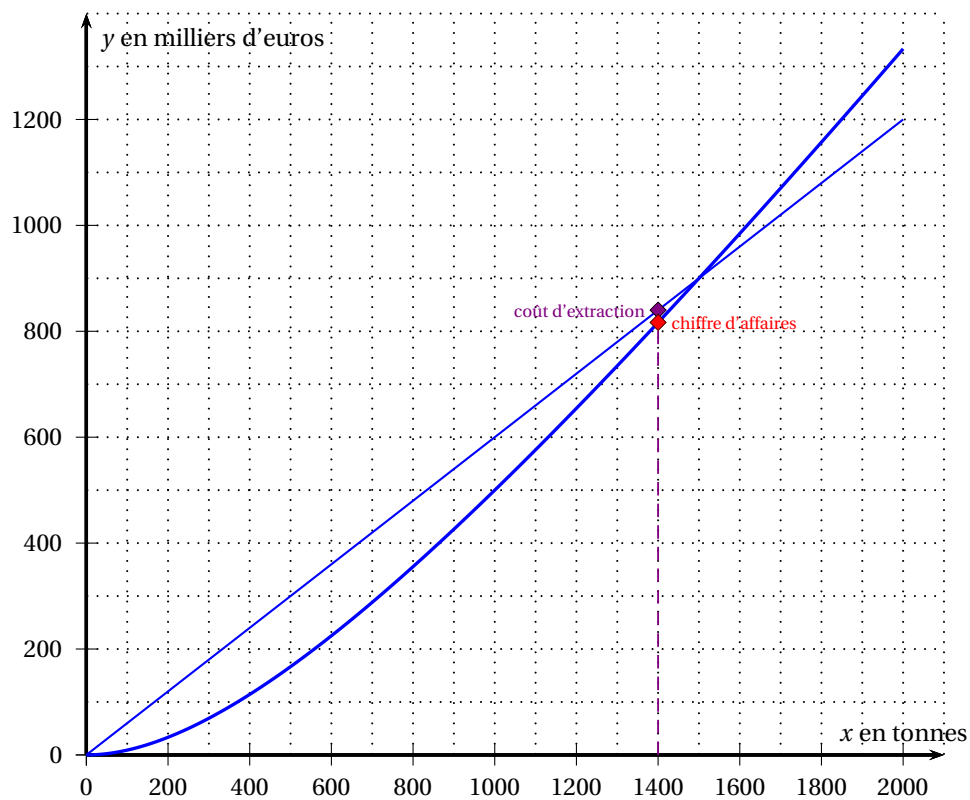
$$P(F \cap R) = 0,75 \times 0,57 = 0,4275 \approx 0,43.$$

5. La probabilité de choisir un garçon, sachant que sa spécialité est ressources humaines et communication est notée  $P_R(G)$ .

$$P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{0,25 \times 0,22}{0,25 \times 0,22 + 0,4275} = \frac{0,055}{0,4825} = 0,1139 \approx 0,11.$$

Annexe à rendre avec la copie

Annexe 1



Annexe 2

