Baccalauréat SMTG Pondichéry 8 avril 2014
Sciences et technologies du management et de la gestion correction

EXERCICE 1 **5 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Dans cet exercice, tous les prix seront exprimés en euros.

On s'intéresse à l'évolution du prix des appartements neufs en France métropolitaine.

Partie A

Le tableau ci-dessous indique le prix des appartements neufs en France métropolitaine, en euros par m^2, entre 2004 et 2012.

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix de l'appartement (en euros par m^2) : y_i	2 563	2 852	3 071	3 276	3 344	3 368	3 571	3 773	3 861

Sources Insee SoeS

Le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté en **annexe à rendre avec la copie**.

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 150{,}783x + 2\,694{,}533$. *les coefficients étant arrondis au millième près.*
2. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 151x + 2\,695$.
   a. La droite $\mathscr{D}$ est tracée sur le graphique de l'annexe à rendre avec copie.
   b. Calculons le prix du m^2 d'un appartement neuf prévu par ce modèle d'ajustement en 2014. En 2014, le rang de l'année est 10, nous remplaçons donc x par 10 dans l'équation de la droite. $y = 151 \times 10 + 2\,695 = 4\,205$.
   Le prix du m^2 d'un appartement neuf prévu par ce modèle d'ajustement en 2014 est de 4 205 €.
   c. Selon ce modèle,pour déterminer en quelle année pour la première fois le prix du m^2 d'un appartement neuf sera supérieur à 5 000 €, résolvons $y \geqslant 5\,000$.
   $151x + 2\,695 \geqslant 5\,000 \iff 151x \geqslant 5\,000 - 2\,695 \iff x \geqslant \dfrac{2\,305}{151}$ or $\dfrac{2\,305}{151} \approx 15{,}26$.
   L'année où le prix du m^2 d'un appartement neuf sera supérieur à 5 000 € pour la première fois est celle de rang 16 c'est-à-dire en 2020.

Partie B

Dans cette partie, on modélise ainsi l'évolution du prix du m^2 d'un appartement neuf en France métropolitaine : on part d'un prix de 4 200 euros en 2014 et on applique une augmentation annuelle de 5,2 % à partir de cette date.
On définit la suite (u_n) où u_n représente la valeur estimée, selon ce modèle, du prix du m^2 d'un appartement neuf l'année $(2014 + n)$. Ainsi $u_0 = 4\,200$ correspond au prix du m^2 d'un appartement neuf en 2014. On crée la feuille de calcul suivante dans laquelle les cellules de la plage B2:B8 sont au format nombre à deux décimales :

	A	B
1	n	u_n
2	0	4 200,00
3	1	4 418,40
4	2	4 648,16
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	

1. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,052. En effet, à une augmentation de 5,2 % est associée un coefficient multiplicateur de 1,052.Nous passons d'un terme au suivant en multipliant par ce même nombre.
2. Selon ce modèle, déterminons le prix du m^2 qu'aurait un appartement neuf en 2020.
   Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$. $u_n = 4\,200 \times (1{,}052)^n$.
   En 2020 nous avons $n = 6$. $u_6 = 4\,200 \times 1{,}052^6 \approx 5\,693{,}03$.
   Au centime près, le prix du m^2 d'un appartement neuf en 2020 s'élèvera à 5 693,03 €.
3. Selon ce modèle, pour déterminer en quelle année pour la première fois le prix du m^2 d'un appartement neuf dépassera 6 000 €, résolvons $u_n \geqslant 6\,000$. À l'aide de la calculatrice nous obtenons $u_7 \approx 5\,989{,}07$ et $u_8 \approx 6\,300{,}50$. Par conséquent $n = 8$, ce qui correspond à 2014 +8 soit 2022.
   En 2022, pour la première fois le prix du m^2 d'un appartement neuf dépassera 6 000 €.

EXERCICE 2 — 4 points

Dans cet exercice, tous les prix sont exprimés en euros

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM)

Pour chacune des quatre questions, une seule des trois réponses proposées est correcte. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Le tableau suivant est extrait d'une feuille de calcul obtenue à l'aide d'un tableur. Dans la colonne B figurent les prix annuels moyens en métropole d'un kg de pain de 2003 à 2013.

	A	B	C
1	Année	Prix annuel moyen d'un kg de pain en métropole	Taux d'évolution **depuis** janvier 2003
2	janvier 2003	2,78	
3	janvier 2004	2,92	5,04 %
4	janvier 2005	2,97	6,83 %
5	janvier 2006	3,03	
6	janvier 2007	3,13	
7	janvier 2008	3,28	
8	janvier 2009	3,35	
9	janvier 2010	3,34	
10	janvier 2011	3,39	
11	janvier 2012	3,43	
12	janvier 2013	3,47	
13			

Source : INSEE

La plage B2:B12 est au format nombre à deux décimales. La plage C3:C12 est au format pourcentage à deux décimales.
Dans la colonne C, partiellement remplie, on veut afficher le taux d'évolution du prix d'un kg de pain entre janvier 2003 et janvier de chacune des années suivantes. Par exemple :

- Dans la cellule C3 est affiché le taux d'évolution du prix d'un kg de pain entre janvier 2003 et janvier 2004.
- Dans la cellule C12 sera affiché le taux d'évolution du prix d'un kg de pain entre janvier 2003 et janvier 2013.

1. La valeur affichée dans la cellule C6 sera :
   - ~~0,35 %~~
   - ~~8,99 %~~
   - 12,59 %

2. Quelle formule, à recopier sur la plage C3:C12, peut-on entrer dans la cellule C3 ?
   - ~~=(B3-B2)/B2~~
   - ~~=(B$3-B2)/B2~~
   - =(B3-B$2)/B$2

3. Le prix d'un kg de pain en janvier 2003 est pris comme indice en base 100. L'indice de janvier 2005, arrondi au centième, est :

- $\boxed{106{,}83}$
- ~~93,17~~
- ~~101,71~~

4. De janvier 2003 à janvier 2013, le taux d'évolution annuel moyen du prix d'un kg de pain, arrondi au centième près, est :

- ~~2,48 %~~
- $\boxed{2{,}24\,\%}$
- ~~24,82 %~~

EXERCICE 3 **6 points**

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes

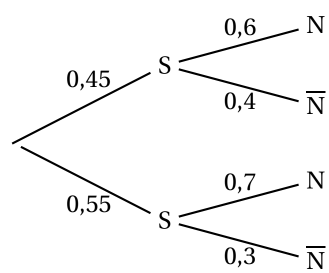
Partie A

Un sondage a été effectué auprès de vacanciers sur leurs pratiques sportives pendant leurs congés.
Ce sondage révèle que 45 % des vacanciers fréquentent une salle de sport pendant leurs congés et parmi ceux-ci, 60 % pratiquent la natation.
Parmi les vacanciers qui ne fréquentent pas une salle de sport, 70 % pratiquent la natation.
On choisit un vacancier au hasard. On considère les événements suivants :

S : « le vacancier choisi fréquente une salle de sport »

N : « le vacancier choisi pratique la natation ».

1. Construisons l'arbre de probabilité décrivant la situation.



2. **a.** L'événement $S \cap N$ est l'événement : « le vacancier choisi fréquente la salle de sport et pratique la natation ».

b. Calculons la probabilité de l'événement $S \cap N$. $p(S \cap N) = p(S) \times p_S(N) = 0{,}45 \times 0{,}6 = 0{,}27$.

3. Montrons que $p(N) = 0,655$.

$p(N) = p(S) \times p_S(N) + p(S) \times p_{\overline{S}}(N) = 0{,}27 + 0{,}55 \times 0{,}7 = 0{,}27 + 0{,}385 = 0{,}655$.

4. Calculons $p_N(S)$, la probabilité de l'événement S sachant que l'événement N est réalisé.

$p_N(S) = \dfrac{p(S \cap N)}{p(N)} = \dfrac{0{,}27}{0{,}655} \approx 0{,}4122$ à 10^{-4} près.

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre vacanciers pris au hasard. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de ces vacanciers pratiquant la natation pendant leurs congés. Le nombre de vacanciers étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

a. X suit une loi binomiale de paramètres (4 ; 0,655).

b. Calculons la probabilité que deux vacanciers exactement pratiquent la natation pendant leurs congés.

$p(X = 2) = \dbinom{4}{2}(0{,}655)^2 \times (1 - 0{,}655)^{4-2} = 0{,}3064$ à 10^{-4} près .

Partie B

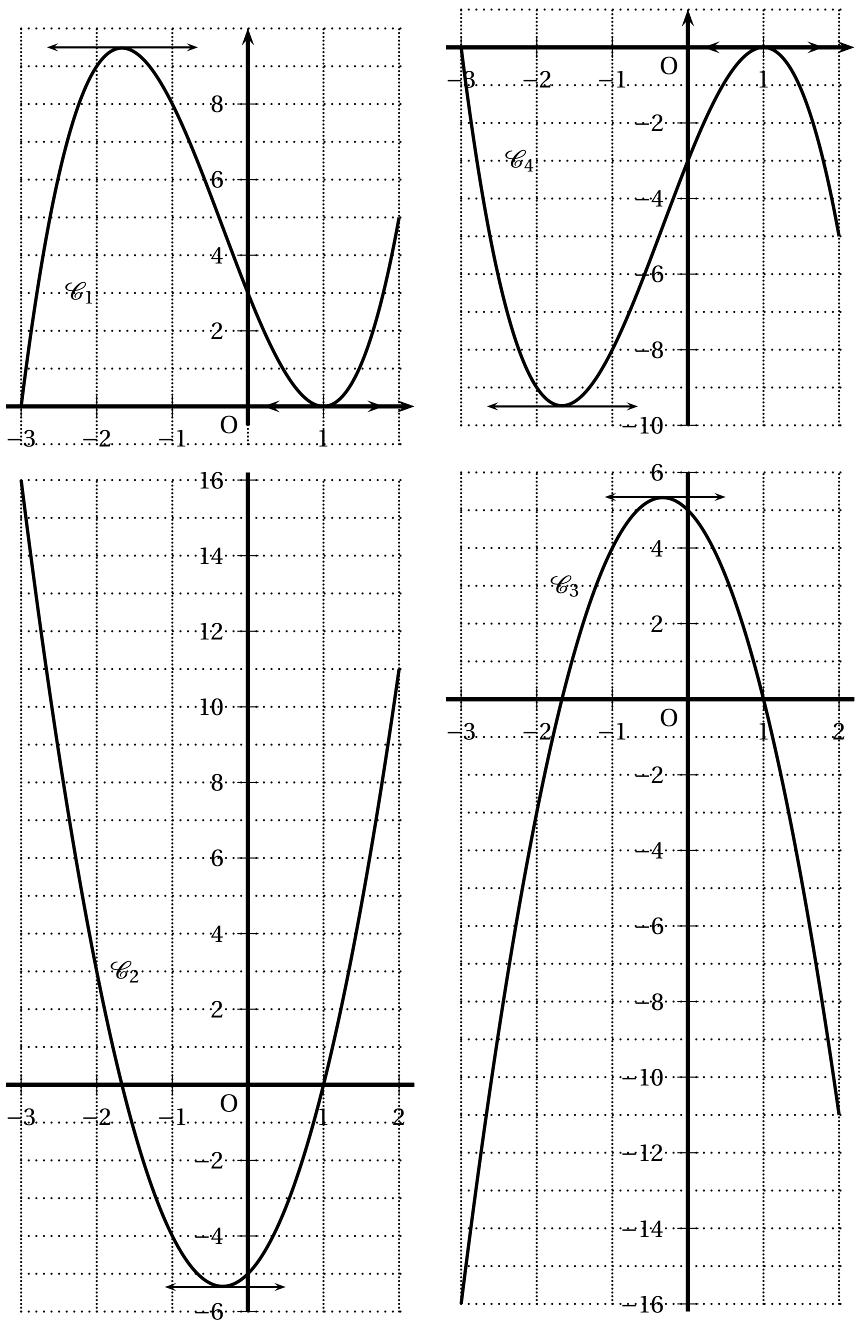
En France, en 2011, 22 % des sportifs licenciés avaient une licence de football. Déterminons un intervalle de fluctuation à au moins 95 % de la fréquence des licenciés de football dans un échantillon de 400 sportifs licenciés choisis au hasard parmi les sportifs licenciés en 2011.

Un intervalle de fluctuation à au moins 95 % de la fréquence p dans un échantillon de taille N est $\left[p - \sqrt{\dfrac{1}{N}}\ ;\ p + \sqrt{\dfrac{1}{N}}\right]$

Nous avons $p = 0{,}22$ et $N = 400$. L'intervalle est donc $\left[0{,}22 - \sqrt{\dfrac{1}{400}}\ ;\ 0{,}22 + \sqrt{\dfrac{1}{400}}\right]$ c'est-à-dire $[0{,}17\ ;\ 0{,}27]$.

Exercice 4 — 5 points

Quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies et dérivables sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, sont représentées respectivement par les courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ ci-dessous.
On admet que $f_1\left(-\frac{5}{3}\right) \approx 9,5$, $f_2\left(-\frac{5}{3}\right) = 0$, $f_3\left(-\frac{5}{3}\right) = 0$ et $f_4\left(-\frac{5}{3}\right) \approx -9,5$.



1. Par lecture graphique, sans justifier :

a. Dressons le tableau de variation de la fonction f_1.

x	-3		$-\frac{5}{3}$		1		2
f_1	0	$\nearrow$	$\approx 9,5$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

b. Donnons le tableau de signes de la fonction f_2.

x	-3		$-\frac{5}{3}$		1		2
$f_2(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. Le signe de $f_3'(-1)$ est positif.

d. $f_4(2) = -5$.

2. Dans cette question, on considère la fonction g définie sur $[-3 ; 2]$ par

$$g(x) = (x-1)^2(x+3).$$

a. Vérifions que $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.
$g(x) = (x-1)^2(x+3) = (x^2-2x+1)(x+3) = x^3 - 2x^2 + x + 3x^2 - 6x + 3 = x^3 + x^2 - 5x + 3$.
$x^3 + x^2 - 5x + 3$ est par conséquent, une autre écriture de $g(x)$.

b. g' étant la dérivée de la fonction g, déterminons $g'(x)$. $g'(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

c. Résolvons l'équation $3x^2 + 2x - 5 = 0$. Pour ce faire, calculons Δ.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 4 + 60 = 64$. $\Delta > 0$, il existe donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$x_1 = \dfrac{-2-8}{6} = -\dfrac{5}{3}$ $\quad x_2 = \dfrac{-2+8}{6} = 1$. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\dfrac{5}{3} ; 1\right\}$.

Étudions le signe de g' sur l'intervalle $[-3 ; 2]$. En utilisant les résultats précédents, $g'x) = (3x+5)(x-1)$.

x	-3		$-5/3$		1		2
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminons le sens de variation de g.

Si pour tout $x \in I$ $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I. Sur $\left]-\dfrac{5}{3} ; 1\right[$, $g'x) < 0$ par conséquent g est strictement décroissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. Sur $\left[-3 ; -\dfrac{5}{3}\right[$ ou sur $]1 ; 2]$ $\quad g'(x) > 0$ par conséquent g est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.
Dressons alors le tableau de variation de la fonction g.

x	-3		$-\frac{5}{3}$		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$\approx 9,5$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

d. La fonction g est la fonction f_1 représentée ci-dessus, car elles ont même sens de variation, leurs dérivées s'annulent deux fois ce qui exclut f_2 et f_3.
g est d'abord croissante, ce qui exclut f_4.

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 1