∾ Baccalauréat STT ACC - ACA Métropole ∾ septembre 2000

Exercice 1 **8 points**

Un magasin d'électroménager vend, depuis le 1er janvier 1990, des aspirateurs de la marque ASPIRTOU. Son directeur nous a fourni les renseignements consignés dans le tableau ci-dessous, dans lequel on a également précisé le rang x_i de l'année $1989 + x_i$.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i d'aspirateurs vendus	594	670	770	830	930	1 000

1. Représenter le nuage de points M_i de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. On prendra pour unités graphiques
   - 1 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses ;
   - 1 cm pour 50 unités sur l'axe des ordonnées en commençant la graduation à 500.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer G sur le graphique.
3. On observe l'aspect du nuage et on choisit pour ajustement affine la droite d'équation

$$y = 82x + 512.$$

   Tracer cette droite.
4. En utilisant l'ajustement précédent, déterminer graphiquement, puis par le calcul, une estimation du nombre d'aspirateurs que le magasin peut espérer vendre en l'an 2000.
5. En réalité, on a constaté que, après 1995, les ventes ont progressé régulièrement de 15 % par an.
   a. Montrer que le magasin a vendu 1 150 aspirateurs en 1996.
   b. Combien en a-t-il vendu en 1997 ?
   c. Combien peut-il espérer en vendre dans ces conditions en l'an 2000 ?
   Les deux derniers résultats seront arrondis à l'unité près.

Exercice 2 **12 points**

Partie A - Coût marginal

L'entreprise ASPIRTOU fabrique des aspirateurs. Chaque mois, elle produit un nombre x d'aspirateurs, x étant un nombre entier compris entre 1 000 et 6 000.
Le coût de production, exprimé en euros, de x aspirateurs est donné par :

$$C(x) = 0,003x^2 + 60x + 48000.$$

1. Quel est le coût de production exact de 1 000 aspirateurs ? De 1 001 aspirateurs ?
   En déduire l'augmentation du coût entraînée par le 1 001e aspirateur.
2. On appelle coût marginal au rang x et on note $d(x)$ la différence :

$$C(x+1) - C(x).$$

   Ainsi $d(x) = C(x+1) - C(x)$ représente l'augmentation de coût correspondant à la fabrication d'un aspirateur supplémentaire, sachant qu'on en a déjà fabriqué x.

a. Quel est le coût marginal $d(1\,000)$ au rang 1 000 ?

b. Montrer que :

$$C(x+1) = 0,003x^2 + 60,006x + 48\,060,003$$

et $\qquad d(x) = 0,006x + 60,003.$

3. On considère que x est un réel de l'intervalle $[1\,000~;~6\,000]$ et on note C' la dérivée de la fonction C définie par :

$$C(x) = 0,003x^2 + 60x + 48\,000.$$

a. Calculer $C'(x)$, puis $C'(1\,000)$.

b. Calculer $d(1\,000) - C'(1\,000)$ et vérifier que :

$$d(x) - C'(x) = 0,003.$$

Partie B - étude d'une fonction

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,000~;6\,000]$ par :

$$f(x) = 0,003x + 60 + \frac{48\,000}{x}.$$

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de $[1\,000~;6\,000]$:

$$f'(x) = \frac{0,003}{x^2}(x - 4\,000)(x + 4\,000).$$

2. étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $[1\,000~;6\,000]$ et dresser le tableau de variations de f sur $[1\,000~;6\,000]$.

3. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000
$f(x)$		90				

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
On prendra pour unités graphiques :
- 1 cm pour 500 aspirateurs en abscisse
- 1 cm pour 4 euros en ordonnée, en commençant la graduation à 60.

Partie C - Coût moyen et coût marginal

1. Tracer dans le repère précédent la droite D représentant graphiquement la fonction C' définie dans la **partie A**.

2. Le coût moyen d'un aspirateur de l'entreprise ASPIRTOU est égal au coût de production divisé par le nombre d'aspirateurs.
Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[1\,000~;6\,000]$, ce coût moyen est égal a $f(x)$.

3. **a.** Dans la pratique, on remplace le coût marginal d par la dérivée C'.
Donner, par lecture graphique, le nombre d'aspirateurs produits pour lequel le coût moyen est égal au coût marginal.

b. Calculer, pour cette valeur, le coût moyen.