Baccalauréat STT C.G. – I.G. Antilles–Guyane juin 2000

Exercice 1 **4 points**

Benoît sait que le congélateur de la cuisine renferme cinq bâtons de crème glacée, de cinq parfums différents (vanille, chocolat, pistache, café, praliné).
Gourmand et insomniaque, il décide de se lever en pleine nuit, sans allumer la lumière, et de prendre, à tâtons et successivement, deux bâtons dans le congélateur. (Tous les choix sont équiprobables.)

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de couples différents de bâtons qu'il peut ainsi obtenir.
2. Ses parfums préférés sont vanille et café. Calculer les probabilités pour qu'il obtienne :
   a. le bâton à la vanille, puis le bâton au café ;
   b. les bâtons de ses parfums préférés dans un ordre quelconque ;
   c. un seul de ses parfums préférés ;
   d. aucun de ses parfums préférés.

Exercice 2 **6 points**

Pour équiper le club de bridge qu'il vient de créer, Michel a besoin de 16 tables, 72 chaises et 44 jeux de cartes.
Il s'adresse à deux boutiques spécialisées : la boutique A et la boutique B.
La boutique A lui propose un lot de 2 tables, 8 chaises et 11 jeux de cartes pour 2 500 F.
La boutique B lui propose un lot de 2 tables, 10 chaises et 4 jeux de cartes pour 2 750 F.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre x de lots qu'il va acheter à la boutique A et le nombre y de lots qu'il va acheter à la boutique B pour que la dépense soit minimale.

1. Traduire par un système d'inéquations les contraintes d'équipement.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), résoudre graphiquement le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ x+y & \geqslant & 8 \\ 4x+5y & \geqslant & 36 \\ 11x+4y & \geqslant & 44 \end{array}\right.$$

   (Hachurer l'ensemble des points dont les coordonnées ne vérifient pas le système, en expliquant votre démarche pour la seule inéquation $4x+5y \geqslant 36$.)
3. a. Exprimer la dépense D occasionnée par l'achat de x lots à la boutique A et de y lots à la boutique B.
   b. Les couples $(x~;~y)$ correspondant à une dépense donnée D, sont les coordonnées de points de la droite Δ_D dont on donnera une équation sous la forme $y = ax+b$.
   c. Tracer la droite Δ_D avec $D = 27500$.
4. Déterminer à l'aide du graphique, en le justifiant, le nombre x_0 de lots à acheter à la boutique A et le nombre y_0 de lots à acheter à la boutique B pour satisfaire les besoins avec une dépense minimale.
   Calculer cette dépense minimale.

Problème **10 points**

Le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est orthonormal (unité : 2 cm).
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b + c\text{e}^{-x},$$

où a, b et c sont trois réels.
La courbe $\mathscr{C}$ est jointe ci-après.

Partie A - à la découverte de la fonction *f*

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{-x}$.

   b. En déduire que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

   c. Utiliser le graphique pour obtenir l'équation réduite de l'asymptote oblique à $\mathscr{C}$.
   En déduire, par comparaison, les coefficients a et b.

2. **a.** $\mathscr{C}$ passe par le point A(0 ; 3).
   Calculer le coefficient c et donner l'expression définitive de $f(x)$.

   b. Justifier par le calcul que $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ, pour toutes valeurs de la variable.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

Partie B -Vérification par le calcul des données du graphique

1. **a.** Montrer que, pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{1 - 4\text{e}^{-x}}{2}$.

   b. Résoudre $f'(x) \geqslant 0$ et confirmer le résultat du **A. 3.**.

2. **a.** Montrer que, pour tout x non nul, $f(x) = x\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x\text{e}^{x}}\right)$.

   b. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.(On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\text{e}^{x} = 0$.)

3. Établir le tableau de variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.

   b. Reproduire et compléter le tableau suivant. On donnera des valeurs décimales approchées de $f(x)$ à 0,001 près.

x	$-0,1$	$-0,2$	$-0,3$	$-0,4$	$-0,5$	$-0,6$	$-0,7$	$-0,8$	$-0,9$
$f(x)$									

   En déduire un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Partie C - Un calcul d'aire

1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2\text{e}^{-x}.$$

   Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 (x) f(x)\,\text{d}x$.

a. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

b. En déduire une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'aire, en cm^2, de la portion de plan comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.