∽ Baccalauréat STT C. G-I. G. La Réunion ∾ septembre 2000

Exercice 1 **4 points**

Dans le système de numération à base seize, les caractères utilisés sont les chiffres de 0 à 9 et les lettres de A à F.
Un nombre de ce système de numération est une suite de plusieurs caractères de ce type ; par exemple, on peut considérer les nombres A5F, 1A, 331, AB, C81C, ...
On considère les nombres de deux caractères écrits en base seize.
On remarquera qu'un nombre de deux caractères ne peut pas commencer par zéro.

1. Montrer qu'il y a 240 nombres de deux caractères en base seize.
   On pourra s'aider d'un arbre.
2. On écrit au hasard un nombre de deux caractères en base seize. On considère l'évènement A : « le nombre ne contient aucune lettre », et l'évènement B : « le nombre commence par 1 ».
   a. Calculer la probabilité de A.
   b. Calculer la probabilité de B.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement A ∩ B.
   d. Déterminer la probabilité de l'évènement A ∪ B.
   e. Déterminer la probabilité pour qu'un nombre contienne au moins une lettre.
   f. Déterminer la probabilité pour qu'un nombre soit formé de deux caractères différents.

Remarque : *Les probabilités demandées seront données sous forme de fraction irréductible.*

Exercice 2 **6 points**

Une entreprise fabrique des baladeurs pour disques compacts et des platines laser.
Il y a 140 ouvriers travaillant à la fabrication, et chacun de ces ouvriers travaille 40 heures par semaine.
Les chefs de service estiment qu'il faut 10 heures de main d'œuvre pour fabriquer un baladeur et 5 heures pour fabriquer une platine laser.
Les services commerciaux ne peuvent vendre plus de 480 baladeurs et 480 platines laser par semaine.
Le prix de revient, pièces et main-d'œuvre, d'un baladeur est de 300 francs, il est de 400 francs pour une platine laser.
Les services comptables de l'entreprise donnent la consigne de ne pas dépasser la somme de 240 000 francs par semaine pour les pièces et la main-d'oeuvre.
On note x le nombre de baladeurs et y le nombre de platines laser fabriqués par semaine.

1. Traduire les contraintes de fabrication sous la forme d'un système d'inéquations à 2 variables portant sur x et sur y.
2. À tout couple $(x\,;\,y)$ de nombres réels, on associe le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 0,02 cm.
   Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 480\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & 480\\ 2x+y & \leqslant & 1\,120 & & \\ 3x+4y & \leqslant & 2\,400 & & \end{array}\right.$$

Remarque : *On hachurera la partie du plan qui n'est pas solution.*

3. Les prix de vente sont tels que l'entreprise, tous frais payés, fait un bénéfice de 160 francs par baladeur et de 240 francs par platine laser.

a. Exprimer en fonction de x et y le bénéfice B par semaine de fabrication.

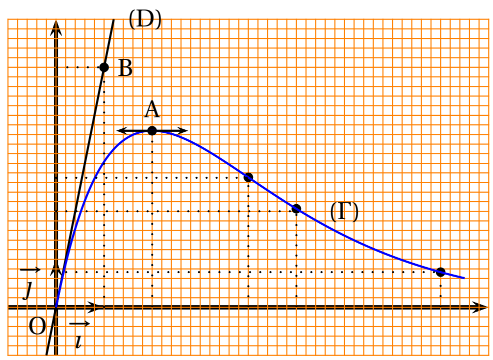
b. Les couples $(x\ ;\ y)$ permettant d'obtenir un bénéfice donné B sont les coordonnées des points d'une droite notée D_B, dont on donnera une équation sous la forme $y = ax + b$.

c. Tracer la droite D_B, avec $B = 96\,000$ F.

4. Déterminer à l'aide du graphique, en le justifiant, le nombre de baladeurs et de platines laser à produire par semaine pour obtenir un bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal.

Problème **10 points**

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthonormal, la courbe représentative (Γ) d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dérivable sur cet intervalle.



On précise que :

- l'origine O du repère appartient à (Γ).
- la droite (D) passant par O et par le point B de coordonnées $(1\ ;5)$ est tangente en O à (Γ).
- la tangente au point A d'abscisse 2 de (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses.
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe (Γ).

1. En utilisant le graphique et les renseignements donnés ci-dessus :

a. Préciser $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

b. Donner la limite de f en $+\infty$.

c. Préciser le sens de variation de f ; dresser son tableau de variations.

2. On cherche une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{cx}$$

où a, b, c sont trois réels.

a. En utilisant $f(O)$, calculer b.

b. Calculer $f'(x)$.

c. En utilisant $f'(0)$ et $f'(2)$, calculer a et c. En déduire que $f(x) = 5x\cdot\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)$.

d. Calculer alors une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$ et $f(8)$. Peut-on dire que f est une bonne approximation de la fonction cherchée ?

Dans la suite du problème, on admettra que (Γ) *est la courbe représentative de la fonction f définie sur* $[0\ ;\ +\infty[$ *par :* $f(x) = 5x\cdot exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)$*, et on pourra utiliser les résultats de la question 1.*

3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = 20 - 10(x+2)\cdot\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right).$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'unité 1 cm.

a. Montrer que, pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $F'(x) = f(x)$.

b. Étudier le sens de variation de F.

c. En utilisant **1. b.**, déterminer la limite de F en $+\infty$.

d. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote (Δ) dont on donnera une équation.

e. Dresser le tableau de variations de F.

f. Préciser la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.

g. Construire $(\mathscr{C})$ et (Δ) dans le plan.

4. **a.** Calculer : $I = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Interpréter géométriquement ce résultat à l'aide de la courbe (Γ), puis à l'aide de $(\mathscr{C})$.