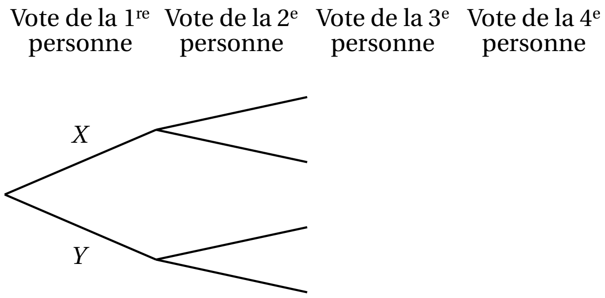
Baccalauréat STT C.G. – I.G. Antilles–Guyane septembre 2000

Exercice 1 **4 points**

Quatre personnes votent pour élire un candidat parmi deux, X ou Y.
Un candidat ne peut être élu au premier tour que s'il obtient la majorité absolue (au moins trois voix).
Chacun des votants doit voter pour un seul des deux candidats. On suppose tous les votes équiprobables.

1. Reproduire et compléter l'arbre suivant :



2. On considère les deux évènements suivants :
A : « Le candidat X est élu au premier tour ».
B : « Le candidat Y est élu au premier tour ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement A et celle de l'évènement B.

b. Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

3. Calculer la probabilité de l'évènement C : « Aucun des candidats n'est élu au premier tour ».

Exercice 2 **5 points**

Pour un échantillon de 15 millions de foyers français, on dispose des informations portées dans le tableau suivant, concernant l'équipement informatique :

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de foyers équipés en millions : y_i	0,5	1	1,2	2,2	3	3,8

1. Représenter, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, le nuage des points M_i de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ associé aux informations ci-dessus, où x_i représente le rang de l'année et y_i le nombre de foyers équipés.

Unités graphiques : sur l'axe des abscisses, 2 cm représentent 1 année et sur l'axe des ordonnées, 5 cm représentent 1 million de foyers.

2. **a.** Calculer les coordonnées du point moyen G_1 du nuage formé des points M_0, M_1, et M_2.

b. Vérifier que les coordonnées du point moyen G_2 du nuage formé des points M_3, M_4 et M_5 sont $(4\ ;\ 3)$.

c. On réalise un ajustement du nuage à l'aide de la droite (G_1G_2). Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) et tracer cette droite sur le graphique précédent.

3. En utilisant l'équation de la droite d'ajustement de la question 2 :

a. Déterminer une estimation du nombre de foyers qui seraient équipés d'un ordinateur en l'an 2002.

b. Déterminer à partir de quelle année on peut estimer que 40 % des foyers seraient équipés d'un ordinateur.

Problème **11 points**

Partie A

L'objectif de cette partie est l'étude du signe d'un polynôme du second degré.

1. Pour tout nombre réel x, on pose

$$P(x) = x^2 + 4x + 3.$$

Résoudre l'équation : $P(x) = 0$.

2. a. Vérifier que $P(x) = (x+1)(x+3)$.

b. Déterminer, en fonction de x, le signe de $P(x)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude d'une fonction. Seule la question B. 2. a. dépend de la partie A.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = (x+3)^2\mathrm{e}^{-x}.$$

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{6x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{9}{\mathrm{e}^x}$.

c. Donner $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a. Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = -P(x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. À partir du signe de $P(x)$ trouvé en partie A, étudier le signe de $-P(x)\mathrm{e}^{-x}$. En déduire le tableau de variations de f.

3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera les valeurs décimales arrondies à 10^{-2}) :

x	$-3,5$	-3	-2	-1	0	1	2	3	3,5
$f(x)$									

4. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f, dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $\mathrm{I} = [-3,5\,;\ 3,5]$. (Unité graphique : 1 cm).

Partie C

L'objectif de cette partie est l'étude d'une aire liée à la fonction étudiée en partie B.
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(-x^2 - 8x - 17\right)\text{e}^{-x}.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Hachurer sur le graphique de la question B. 4. le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en cm^2, de la partie hachurée. On donnera la valeur exacte de $\mathcal{A}$ et sa valeur décimale arrondie à 10^{-1}.