Baccalauréat STT A.C.A.-A.C.C.
France septembre 2002

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, la période concernée s'étend de 1993 à 2001 et les prix sont en francs.
Monsieur et Madame C. possédaient chacun une voiture du même modèle achetée neuve en janvier 1993 aux prix de 74 500 F. Ils faisaient à peu près le même nombre de kilomètres par an.

1. Madame C. a changé de voiture tous les deux ans, au mois de janvier, pour un véhicule neuf du même type. à chaque renouvellement, elle a souscrit un contrat d'entretien qui lui a coûté 562 F. En janvier 1995, elle a acheté un véhicule neuf qui valait 74 500 F et son concessionnaire lui a repris son ancienne voiture au prix de 55 050 F. Les conditions d'achat, d'entretien et de reprise des véhicules successifs sont restées les mêmes jusqu'en janvier 2001 inclus.

   a. Vérifier que la dépense effectuée par Madame C. pour l'entretien et le changement de son véhicule en janvier 1995 était de 20 012 F.

   b. Quelle dépense globale S, en francs, Madame C. a-t-elle effectuée pendant la période de janvier 1993 à janvier 2001 après l'acquisition de son cinquième véhicule, sachant qu'elle avait pris un contrat d'entretien en janvier 1993 ?

2. Monsieur C., lui, a gardé la voiture achetée en janvier 1993 jusqu'en janvier 2001, date à laquelle il a décidé d'en changer. Il a alors fait le bilan de toutes les dépenses qu'il a effectuées pour l'entretien de cette voiture.

   Durant l'année 1993, il avait dû faire une simple révision qui lui a coûté 216 F. Puis, il a constaté que les frais d'entretien augmentaient chaque année de 60 %.

   On note v_0 ($v_0 = 216$) le montant en francs des dépenses effectuées par Monsieur C. pour l'entretien de sa voiture durant l'année 1993 et plus généralement v_n le montant, en francs, des dépenses qu'il a effectuées pour l'entretien durant l'année $1993 + n$, où n est un entier compris entre 1 et 7.

   a. Déterminer v_1 et v_2.

   b. Exprimer v_1 en fonction de v_0, puis v_2 en fonction de v_1 et, plus généralement, v_{n+1} en fonction de v_n.

   c. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique jusqu'au terme v_7. Donner la raison b de cette suite.

   d. Quelle somme s, Monsieur C. a-t-il dépensée pour l'entretien de sa voiture de janvier 1993 à janvier 2001 ? Cette somme sera arrondie au franc près.

   e. En janvier 2001, le concessionnaire a repris la voiture de Monsieur C. au prix de 8 500 F et il lui a vendu un véhicule neuf à 74 500 F.

   Déterminer la somme globale S', en francs, que Monsieur C. a dépensée pendant la période de janvier 1993 à janvier 2001 après l'achat de son deuxième véhicule.

3. Qui de Madame C. ou Monsieur C. a géré au mieux la façon de changer sa voiture ? Justifier.

EXERCICE 2

Sur une autoroute, le prix du péage est de 0,07 € par kilomètre. La société qui exploite l'autoroute propose aux usagers un abonnement aux conditions suivantes :
• achat d'une carte annuelle d'un coût de 56 €.
• 30 % de réduction sur le prix du kilomètre aux titulaires de la carte.

Partie A : choix d'un automobiliste

1. Un automobiliste parcourt 10 000 km sur l'autoroute dans l'année.
   a. Combien paie-t-il sans abonnement ?
   b. Combien paie-t-il avec abonnement ?
   c. Quel est le pourcentage d'économie réalisé s'il prend un abonnement ?
2. Les fonctions f et g sont définies de la façon suivante
   • $f(x)$ est le coût du péage pour un automobiliste non abonné parcourant x kilomètres dans l'année ;
   • $g(x)$ est le coût du péage pour un automobiliste abonné parcourant x kilomètres dans l'année.
   a. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   b. Montrer que $g(x) = 0,049x + 56$.
   c. Représenter graphiquement les fonctions f et g dans un même repère, sur l'intervalle $[0\ ;\ 10000]$.
   Sur l'axe des abscisses, un centimètre représente 1 000 km et sur l'axe des ordonnées, un centimètre représente 100 €.
   d. Résoudre par le calcul l'inéquation $g(x) \leqslant f(x)$.
   En déduire la distance parcourue, arrondie au km, à partir de laquelle l'automobiliste a intérêt à s'abonner.

Partie B : étude du pourcentage d'économie

Un automobiliste parcourt plus de 3 000 km par an.

1. Le pourcentage d'économie qu'il réalise pour x kilomètres parcourus au cours d'une année d'abonnement est donné par :
$$p(x) = \frac{f(x) - g(x)}{f(x)}.$$
   Montrer que $p(x) = 0,3 - \dfrac{800}{x}$.
2. On étudie la fonction p définie sur l'intervalle $[3\,000\ ;\ 20\,000]$ par :
$$p(x) = 0,3 - \frac{800}{x}.$$
   a. On note p' la fonction dérivée de la fonction p. Calculer $p'(x)$.
   b. En déduire le sens de variations de la fonction p sur l'intervalle $[3\,000\ ;\ 20\,000]$.
3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Sur l'axe des abscisses, un centimètre représente 1 000 km et sur l'axe des ordonnées un centimètre représente 0,02 c'est-à-dire 2 %.
   Tracer la courbe représentative de la fonction p sur l'intervalle $[3\,000\ ;\ 20\,000]$.
4. **a.** À partir de combien de kilomètres parcourus en une année le pourcentage d'économie dépasse-t-il 25 % ?
   b. Ce pourcentage peut-il dépasser 30 % ? Justifier votre réponse.