Baccalauréat STT C.G. – I.G. Polynésie juin 2001

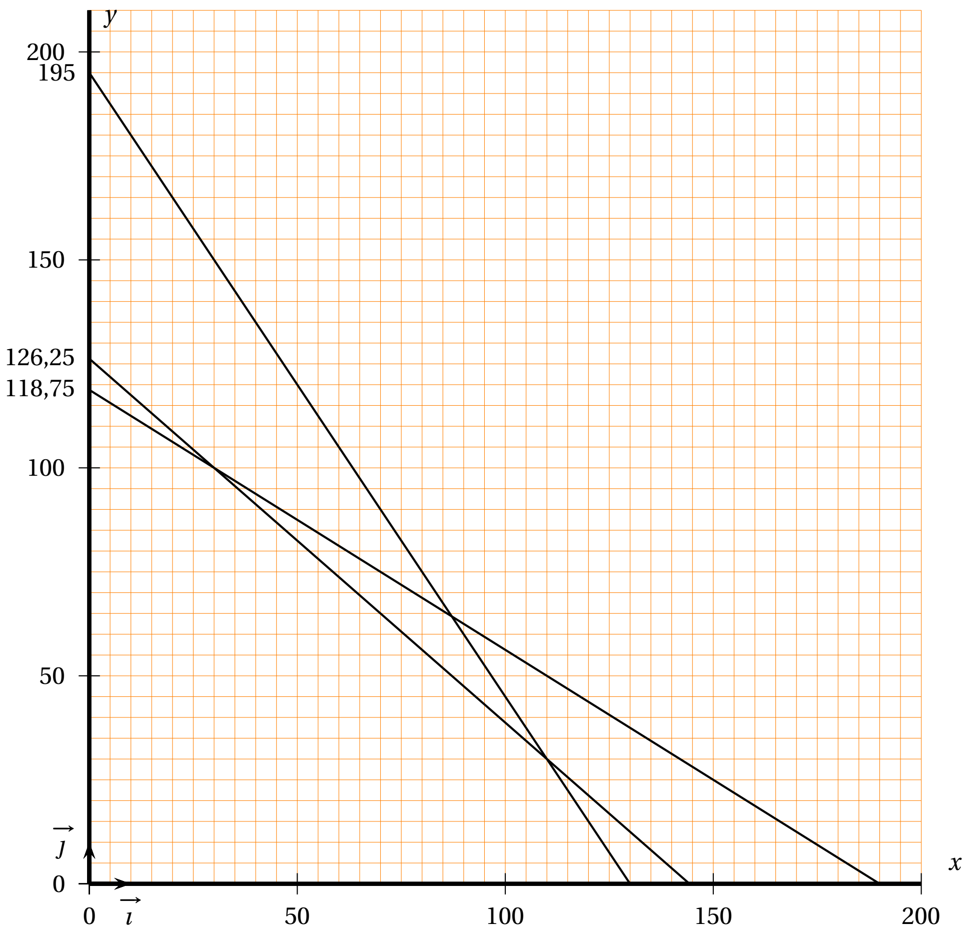
Exercice 1 **6 points**

Maximalisation par programmation linéaire

1. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Unités graphiques : 1 cm pour dix unités en abscisse et en ordonnée.
   Hachurer, sur la figure donnée page suivante l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ ne vérifient pas le système (S) suivant :

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0;\\ y & \geqslant & 0;\\ y & \leqslant & -\frac{7}{8}x+126,25;\\ y & \leqslant & -\frac{3}{2}x+195;\\ y & \leqslant & -\frac{5}{8}x+118,75.\end{array}\right.$$

2. Afin de renouveler son stock, un confiseur décide d'organiser une vente promotionnelle et propose deux lots :
   • Un lot A comportant 7 boîtes de chocolats, 6 boîtes de dragées, et 5 boîtes de pâtes de fruits,
   • Un lot B comportant 8 boîtes de chocolats, 4 boîtes de dragées et 8 boîtes de pâtes de fruits.
   La vente d'un lot A lui rapporte 700€ et celle d'un lot B, 600€.
   Le confiseur dispose en stock de 1 010 boîtes de chocolats, de 780 boîtes de dragées et de 950 boîtes de pâtes de fruits.
   On désigne par x le nombre de lots A et par y le nombre de lots B.
   a. Montrer que les contraintes de la situation peuvent se traduire par le système (S) de la question 1, où x et y désignent des nombres entiers naturels.
   b. Exprimer en fonction de x et de y la recette R, en euros, réalisée par la vente de x lots A et de y lots B.
   c. Écrire l'équation de la droite $\mathcal{D}$ correspondant à une recette de 54 000 € sous la forme $y = ax + b$.
   Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur la figure ci-dessous.
   d. À l'aide du graphique, donner les nombres de lots A et de lots B que le confiseur doit vendre pour que la recette soit maximale. Quelle est alors cette recette ?



Exercice 2 **5 points**

Une urne contient 60 boules : vertes, bleues ou jaunes.
Dans chaque couleur, certaines sont unies et d'autres sont rayées de noir.

1. Représenter la répartition des boules par un tableau sachant que :
   — 30 % des boules sont bleues unies,
   — 20 % des boules sont vertes et les deux tiers d'entre elles sont rayées,
   — il y a deux fois plus de boules jaunes que de vertes,
   — 75 % des boules jaunes sont rayées.
2. On choisit au hasard une boule dans cette urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   A : « obtenir une boule rayée »,

   B : « obtenir une boule verte et unie »,

   C : « obtenir une boule jaune ou unie »,

   D : « obtenir une boule ni bleue, ni unie ».

   On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à 10^{-3} près de chacune des probabilités demandées.

Problème **9 points**

Les objectifs de ce problème sont de déterminer graphiquement quelques résultats concernant une fonction f (partie A), puis d'étudier cette fonction et de calculer une intégrale qui lui est associée (partie B).

Partie A

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous, représente une fonction f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Sur cette figure, sont également tracées une droite $\mathscr{D}$ ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses respectives 0 et $1,5$.
En utilisant cette figure :

1. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

2. Déterminer une valeur approchée à $0,1$ près de $f(1,5)$, ainsi qu'une valeur approchée à $0,1$ près de $f'(1,5)$.

3. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$.

4. Préciser le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1,5]$.

Partie B

La fonction étudiée graphiquement dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x + 1.$$

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Vérifier que, pour tout réel x non nul, $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-x+1)]$.
Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

b. Étudier, pour x appartenant à $\mathbb{R}$, le signe de $f(x) - (-x+1)$.
Interpréter graphiquement le résultat.

3. **a.** Calculer $f'(x)$.

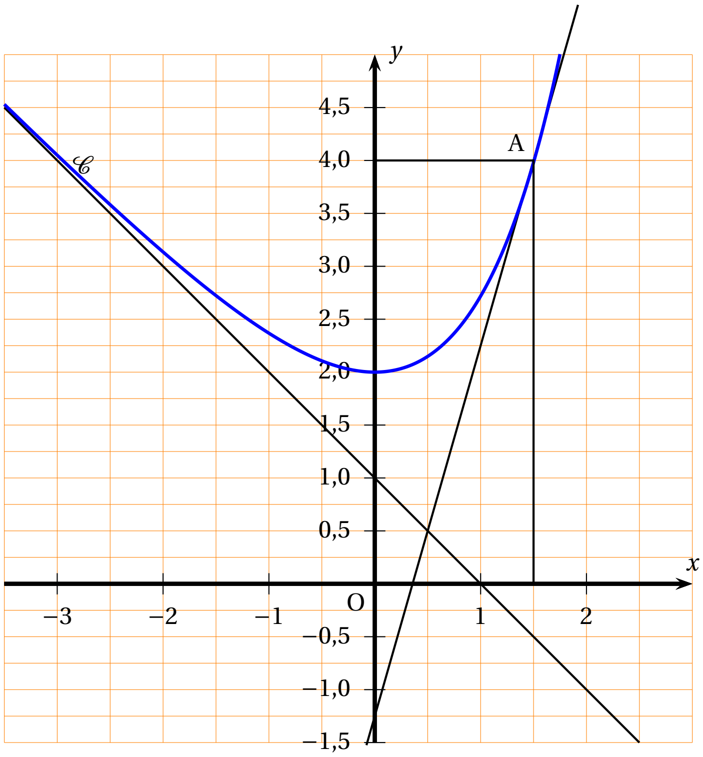
b. Résoudre, pour x appartenant à $\mathbb{R}$, l'inéquation $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction f, sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

c. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près par excès de cette intégrale et interpréter graphiquement le résultat.



y
x
A
$\mathscr{C}$
O
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
−0,5
−1,0
−1,5
−3
−2
−1
1
2