Baccalauréat STT CG - IG Antilles septembre 2003

Coefficient 2 | Durée 2 heures

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **6 points**

Pour étudier le taux de mortalité dans des colonies de rats, un laboratoire de recherche dispose d'une cage aménagée de 92 m^2.
Pour une série d'expériences, les conditions sont les suivantes :
- La colonie recevra 10 kg (10 000 g) de nourriture par jour.
- En moyenne, un mâle mange 30 g de nourriture par jour et a besoin de 0,5 m^2.
- En moyenne, une femelle mange 40 g de nourriture par jour et a besoin de 0,2 m^2.
- Le nombre de mâles doit être inférieur ou égal à 1,5 fois le nombre de femelles.

Pour que cette étude, basée sur des séries statistiques, soit la plus fiable possible, on veut définir le nombre maximal de rats que doit contenir la cage.
On notera donc x le nombre de mâles et y le nombre de femelles placés dans la cage.

1. Traduire l'ensemble des contraintes de ce problème sous la forme d'un système d'inéquations en x et y.
2. Justifier que ce système est équivalent au système :

$$(\text{S}) \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0\\ y & \geqslant & 0\\ 3x+4y & \leqslant & 1\,000\\ 5x+2y & \leqslant & 920\\ 2x & \leqslant & 3y \end{array}\right.$$

3. Représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x~;~y)$ dont les coordonnées sont solutions du système (S) dans un repère orthonormal où 1 cm représente 20 unités. (20 rats).
4. On note n le nombre de rats de la colonie. On a donc $x+y=n$.
   $x+y=n$ est l'équation d'une droite notée $\mathcal{D}_n$.
   a. Déterminer le coefficient directeur de $\mathcal{D}_n$.
   b. Expliquer pourquoi, pour deux nombres n et p de rats, les droites $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{D}_p$ sont parallèles.
   c. Tracer la droite $\mathcal{D}_{100}$ correspondant à $n=100$ rats.
5. On note T le nombre maximal de rats que le laboratoire doit mettre dans la cage pour respecter les conditions de l'expérience.
   a. Expliquer comment tracer la droite $\mathcal{D}_{\text{T}}$ correspondant à T rats. Tracer $\mathcal{D}_{\text{T}}$.
   b. Déterminer graphiquement le nombre T.
   c. À l'aide de la représentation graphique, déterminer combien de mâles et de femelles on doit mettre dans la cage.
   d. Devrait-il rester de la nourriture en fin de journée ?

EXERCICE 2 **5 points**

Les résultats de l'étude réalisée par un laboratoire de recherche sur le taux de mortalité en fonction du nombre d'individus dans des colonies de rats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Nombre initial de rats dans la colonie	40	80	120	160	200	240	280	320
Nombre moyen de rats décédés*	0,36	1,6	2,6	4,6	9,4	14,9	26,0	45,4

* *Ce nombre moyen correspond à la moyenne des décès lors d'expériences sur un nombre identique de rats.*

Le **taux de mortalité** est le pourcentage de décès par rapport au nombre initial de rats dans la colonie.

1. Le tableau suivant représente le taux moyen de mortalité (exprimé en pourcentage arrondi à 0,1 % près) en fonction du nombre de rats de la colonie.

Nombre initial x_i de rats dans la colonie	40	80	120	160	200	240	280	320
Taux moyen de mortalité y_i	0,9							

Reproduire et compléter ce tableau.

2. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. On prendra comme unités 1 cm pour 20 rats sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 % sur l'axe des ordonnées.

3. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

4. On propose d'ajuster le nuage par la droite d d'équation :

$$y = 0,043x - 2,44$$

obtenue à l'aide d'un tableur.

On suppose, dans les deux questions suivantes, que d réalise un ajustement linéaire acceptable.

a. Justifier que G appartient à d.

b. Tracer la droite d.

c. Quel serait le taux de mortalité si le nombre de rats était de 400 ?

d. À partir de combien de rats le taux de mortalité dépasserait-il 20 % ?

5. Une série d'expériences avec 360 rats a donné un taux moyen de mortalité de 22,6 %.

L'ajustement linéaire proposé vous paraît-il être satisfaisant ?

PROBLÈME **9 points**

Partie A

On a défini une corrélation entre le nombre d'individus d'une colonie de rats et le taux de mortalité dans cette colonie sous la forme d'une suite définie par récurrence par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} U_0 & = & 0,74 & \text{et} \\ U_{n+1} & = & 1,44U_n & \end{array}\right.$$

où n est le nombre de groupes de 40 rats présents dans la colonie et U_n est le taux de mortalité dans cette colonie.

1. Recopier et compléter le tableau suivant (on arrondira au dixième)

Nombre initial de rats dans la colonie	40	80	120	160	200	240	280	320
n	1	2	3	4	5	6	7	8
U_n								

2. Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Exprimer U_n en fonction de n.

3. On constate que $e^{0,364} \approx 1,44$. Justifier que :

$$U_n \approx 0,74e^{0,364n}.$$

Partie B

On définit donc la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,74e^{0,364x}.$$

1. Déterminer la fonction f', dérivée de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Le taux de mortalité ne pouvant être supérieur à 100 %, on considère que notre modèle mathématique n'est fiable que jusqu'à un taux de mortalité de 30 %.

   a. Résoudre l'équation $f(x) = 30$. (On donnera la valeur exacte de la solution puis la valeur arrondie au dixième).

   b. En déduire le nombre de rats à partir duquel notre modèle n'est plus valable.

Partie C

On cherche à modéliser le taux de mortalité pour un nombre de rats supérieur ou égal à $400 (x \geqslant 10)$.
On définit la fonction G sur $[10\ ;\ +\infty]$ par :

$$G(x) = 100 - 0,0655e^{(9-0,2x)}.$$

1. Déterminer la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On admettra que G réalise un modèle du taux de mortalité satisfaisant pour plus de 400 rats.

   Calculer le taux de mortalité pour 800 rats dans la colonie $(x = 20)$.