

~ Baccalauréat C. G. – I. G. Centres étrangers ~
juin 2003

EXERCICE 1

4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 9]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 9}{x}.$$

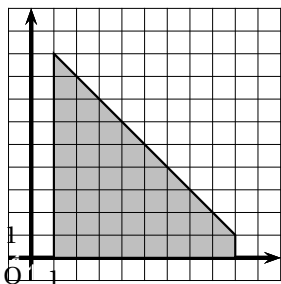
1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $-x^2 + 10x - 9 = 0$.
2. a. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 9]$, on a :

$$f(x) = 10 - x - \frac{9}{x}.$$

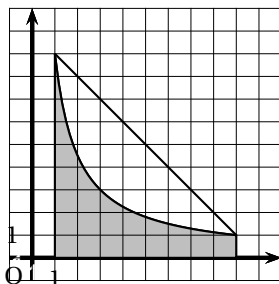
- b. Calculer alors l'intégrale $I = \int_1^9 f(x) dx$ (donner la valeur exacte).
- c. Montrer que I peut s'écrire sous la forme $a + b \ln 3$ où a et b sont deux nombres réels qu'il faut déterminer.
3. On a représenté sur chacun des graphiques ci-dessous les fonctions g et h définies sur l'intervalle $[1 ; 9]$ par :

$$g(x) = 10 - x \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{9}{x}.$$

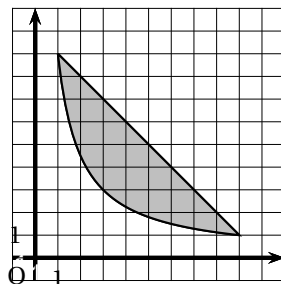
On a aussi grisé sur chacun des graphiques une partie du plan.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

On pose : $I = \int_1^9 \left(10 - x - \frac{9}{x}\right) dx$, $J = \int_1^9 (10 - x) dx$ et $K = \int_1^9 \frac{9}{x} dx$.

Pour chacune des trois questions, reporter sur la copie la réponse exacte (il y a une seule bonne réponse par ligne).

Q1	Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 1 ?	I	J	K
Q2	Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 2 ?	I	J	K
Q3	Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 3 ?	I	J	K

EXERCICE 2

5 points

Un jeu télévisé permet aux candidats sélectionnés de se voir verser chaque mois pendant une durée maximale de douze mois une somme d'argent dont le montant initial le premier mois est de 1 000 euros.

Le versement augmente chaque mois de 3 % sur le modèle des intérêts composés. Ainsi le 2^e mois, il touchera 1 030 euros, etc.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Un candidat subit une épreuve qui permet de déterminer de façon aléatoire la durée maximale du versement. Pour cela, le candidat jette deux dés non truqués et numérotés de 1 à 6 chacun.
Construire un tableau pour représenter tous les résultats équiprobables possibles de cette épreuve aléatoire.
2. Le candidat calcule alors la somme des deux numéros apparents sur les faces supérieures.
Cette somme représente la durée du versement en mois.
Les résultats de cette question 2. seront donnés sous forme de fraction irréductible.
 - a. Calculer alors la probabilité de l'évènement A : « le candidat obtient une durée de 10 mois exactement ».
 - b. Calculer la probabilité de l'évènement B : « le candidat obtient une durée strictement supérieure à 6 mois ».
 - c. Donner un exemple d'évènement D pour lequel la probabilité est égale à $\frac{5}{18}$.
3. Dans cette question on s'intéresse à un candidat qui a reçu un versement V_1 de 1 000 € pour le premier mois. Pour chacun des 10 mois suivants, le versement augmente de 3 % par rapport au mois précédent.
 - a. Calculer la somme versée au candidat le 11^e mois. Arrondir le résultat à l'euro près.
 - b. Calculer la somme totale gagnée par ce candidat au bout des onze mois. Arrondir le résultat à l'euro près.

PROBLÈME**11 points**

Ce problème a pour objet l'étude d'une fonction f et la comparaison de résultats lus sur la représentation graphique de cette fonction, obtenue à l'aide d'un logiciel avec les résultats obtenus par calculs.

Partie A

Un élève a obtenu, à l'aide d'un logiciel, la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ dans un repère du plan d'origine O. Il a réglé la fenêtre d'affichage pour x appartenant à l'intervalle $[1 ; 8]$ et pour y appartenant à l'intervalle $[-6 ; 3]$.

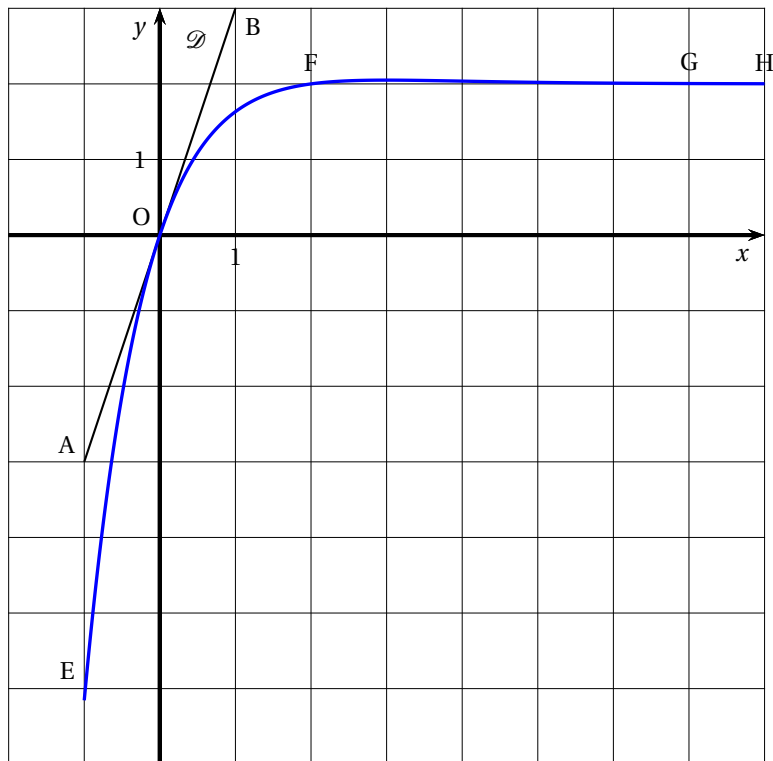
La courbe de f dans un repère du plan d'origine O s'appelle \mathcal{C} . Il a aussi tracé une droite qu'il pense être la tangente à la courbe \mathcal{C} au point O.

Enfin, il a placé des points dont il pense qu'ils sont sur la droite \mathcal{D} ou encore sur la courbe \mathcal{C} . Voir la courbe ci-dessous.

On décide dans cette première partie de se fier à ce graphique et au travail de cet élève.

Pour répondre aux questions 1. à 6. ci-dessous, complétez la 3^e colonne du tableau donné sur la feuille Annexe à rendre avec la copie.

1. Lire sur ce graphique l'image du nombre -1 par la fonction f .
2. Lire sur ce graphique l'image du nombre 0 par la fonction f .
3. Donner l'équation de la droite \mathcal{D} .
4. En déduire la valeur de $f'(0)$ (on note f' la dérivée de f).
5. Quel est le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $[-1 ; 2]$?
6. L'élève dit que la fonction est constante sur l'intervalle $[7 ; 8]$. Si l'élève a raison, que peut-on en déduire pour $f(x)$ lorsque x appartient à cet intervalle ?

**Partie B**

La fonction évoquée dans la partie A, est en fait la fonction définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{e^x} + 2.$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$. On rappelle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

3. Interpréter graphiquement le résultat précédent.
4. En observant que $[f(x) - 2]$ est égal à $\frac{x-2}{e^x}$ étudier le signe de cette dernière quantité pour x appartenant à l'intervalle $[2; +\infty[$. Interpréter graphiquement le résultat.
5. Calculer $f'(x)$. Étudier le signe de $f'(x)$.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
7. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} , sous la forme $y = ax + b$, au point d'abscisse 0.
8. À partir des résultats des questions 1. à 7. de la partie B, on veut revenir sur les réponses données dans la partie A. Compléter la dernière colonne du tableau déjà utilisé en Annexe, en écrivant « OUI » pour confirmer la réponse donnée en colonne 2 et « NON » pour infirmer cette réponse.

ANNEXE

Dans le tableau ci-dessous vous devez porter dans la troisième colonne, les réponses aux questions 1., 2., 3., 4., 5. et 6. de la partie A du problème. La dernière colonne de ce tableau sera remplie pour répondre à la question 8. de la partie B.

Questions de la partie A	Lecture sur le graphique ...	Réponses (Partie A)	Je confirme ou je ne confirme pas (Question 8 de la partie B)
Question 1	image de -1 par f		
Question 2	image de 0 par f		
Question 3	équation de la droite \mathcal{D}		
Question 4	valeur de $f'(0)$		
Question 5	signe de $f'(x)$ pour x dans l'intervalle $[-1 ; 2]$		
Question 6	$f'(x)$ avec x dans $[7 ; 8]$		