∽ Baccalauréat STT C.G. – I.G. Pondichéry ∾ mai 2001

Exercice 1 **6 points**

Un assembleur en micro-informatique utilise pour le montage des ordinateurs qu'il vend :

- un processeur P_1 de haut de gamme ;
- un processeur P_2 de gamme moyenne ;
- une carte graphique G performante.

Il doit pouvoir disposer, au début du mois de décembre, de 50 processeurs P_1, 80 processeurs P_2 et 90 cartes graphiques G.

Il commande son matériel début novembre, afin d'être livré pour le début du mois de décembre et s'adresse pour cela à un fournisseur qui propose à ses clients des lots :

- le lot L_1 composé de 5 processeurs P_1, 5 processeurs P_2 et 5 cartes graphiques G ;
- le lot L_2 composé de 2 processeurs P_1, 4 processeurs P_2 et 6 cartes graphiques G.

Pour bénéficier d'une remise, l'assembleur doit commander au moins 3 lots L_1 et 3 lots L_2.

Après cette remise, le fournisseur facture à l'assembleur : 5 900 francs un processeur P_1, 3 200 francs un processeur P_2 et 900 francs une carte graphique G.

On note x le nombre de lots L_1 et y le nombre de lots L_2 que doit commander l'assembleur début novembre, afin de satisfaire la demande pour début décembre.

1. Expliquer pourquoi les contraintes auxquelles doivent satisfaire x et y afin que l'assembleur obtienne les produits dont il a besoin, tout en profitant de la remise du fournisseur, se traduisent par le système d'inéquations ci-après.

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 3\\ y & \geqslant & 3\\ 5x+2y & \geqslant & 50\\ 5x+4y & \geqslant & 80\\ 5x+6y & \geqslant & 90\end{array}\right.$$

2. On considère le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm. Déterminer la région du plan formée des points $M(x~;~y)$ dont les coordonnées vérifient le système (S).

   On rayera la partie du plan formée des points dont les coordonnées **ne vérifient pas le système** (S) et on expliquera la démarche suivie pour les trois premières contraintes du système (S).

3. **a.** À combien revient la commande d'un lot L_1 ?
   Même question pour un lot L_2.

   b. Montrer que la dépense D en francs, occasionnée à l'assembleur pour l'achat de x lots L_1, et de y lots L_2 s'exprime en fonction de x et y sous la forme :

   $$D = 50\,000x + 30\,000y.$$

   c. Montrer que l'ensemble des couples $(x~;~y)$ correspondant à une dépense donnée D sont les coordonnées de points situés sur une droite Δ_D dont on donnera l'équation réduite (sous la forme $y = mx + p$).

   d. Tracer la droite Δ_D pour $D = 900\,000$.

4. a. Expliquer comment, à l'aide du graphique, on peut déterminer le couple $(x_0\ ;\ y_0)$ correspondant à une dépense D minimale.

   b. En déduire, à l'aide du graphique, le nombre x_0 de lots L_1 et le nombre y_0 de lots L_2 que doit commander l'assembleur afin de satisfaire la demande de début décembre. Quelle est alors la dépense engagée ?

Exercice 2 **4 points**

Une usine fabrique en très grand nombre des pièces métalliques.
La fabrication est vérifiée journellement par prélèvement de pièces produites, dont on mesure la longueur.
En fin de journée, on calcule la longueur moyenne des pièces prélevées durant la journée et le contremaître juge que la fabrication est valable lorsque cette longueur moyenne est comprise entre 7,45 cm et 7,55 cm. Dans ce cas, on considère que la machine est bien réglée, sinon on doit procéder à son réglage.
Fin novembre, la machine est réglée et fabrique donc des pièces de longueur valable au début du mois de décembre.
Durant les 8 premiers jours du mois de décembre, on a obtenu, en fin de journée, les résultats suivants

Jour x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Longueur moyenne y_i	7,50	7,50	7,49	7,49	7,48	7,47	7,47	7,46

1. Représenter dans un repère orthogonal, le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série statistique ci-dessus.
   On utilisera comme unités :
   - en abscisse 1 cm pour un jour
   - en ordonnée : 1 cm pour 0,01 en commençant à graduer l'axe à partir de $7,44$.
2. a. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point moyen G_1, associé aux 4 points du nuage ayant les plus petites abscisses.
   Placer G_1 sur le graphique.

   b. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point moyen G_2 associé aux 4 points du nuage ayant les plus grandes abscisses.
   Placer G_2 sur le graphique.

   c. Tracer la droite $d = (G_1G_2)$ sur le graphique.
   Déterminer l'équation réduite (sous la forme $y = mx + p$) de la droite d.
   On donnera les valeurs de m et p avec 6 décimales.
3. On admet que la droite d représente l'évolution, dans le temps, de la longueur des pièces fabriquées par la machine.
   En utilisant le graphique, déterminer à partir de quel jour du mois de décembre la machine a-t-elle besoin d'un nouveau réglage.
   Vérifier le résultat par calcul.

Problème **10 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c$$

où $a,\ b$ et c sont des réels fixés.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan, d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer c sachant que : $f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

   b. En utilisant la valeur de c trouvée en **a**, déterminer a et b sachant que $f\left(\text{e}^2\right) = \dfrac{3}{2}$ et que le point de coordonnées $\left(\text{e}^3\ ;\ \dfrac{11}{2}\right)$ est un point de $\mathcal{C}$.

2. On considère dans la suite la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - \frac{1}{2}.$$

   a. Montrer que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$: $\quad f(x) = \ln x(\ln x - 1) - \dfrac{1}{2}$.
   En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

   b. Déterminer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire

$$f'(x) = \frac{2\ln x - 1}{x}.$$

   c. Déterminer le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3. **a.** Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous, en donnant des valeurs approchées décimales à 10^{-2} près :

x	0,2	0,5	0,9	$\text{e}^{\frac{1}{2}}$	2	3	4	5	8
$f(x)$									

   b. Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   En utilisant la représentation graphique, expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes dans $]0\ ;\ 5]$.

   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que :

$$0,6 \leqslant \alpha \leqslant 0,7.$$

   À l'aide de la calculette, donner une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

4. On considère la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = x(\ln x)^2 - 3x\ln x + \frac{5}{2}x.$$

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. En déduire l'expression d'une primitive quelconque de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. Déterminer la primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ qui prend la valeur 3 pour $x = 1$.

   c. Calculer l'intégrale $\text{I} = \displaystyle\int_5^7 f(x)\,\text{d}x$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire, en cm^2, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 5$ et $x = 7$.