Baccalauréat STT C.G–I.G. Centres étrangers juin 2002

Durée : 3 heures **Coefficient : 4**

Calculatrice autorisée

Exercice 1 **5 points**

Une entreprise étudie l'évolution, à partir de 1993, du pourcentage de cadres parmi ses employés.
Le tableau suivant donne, pour les années indiquées, le nombre x d'années écoulées, depuis 1993 ainsi que le pourcentage y de cadres parmi les employés.

Année	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	11,9	14,2	15,8	18,1	19,6	20,3	21,2	22,9

1. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, représenter le nuage de points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
   On graduera l'axe des ordonnées à partir de 10.
2. On nomme G le point moyen du nuage de points.
   a. Calculer les coordonnées du point G et placer ce point sur le graphique.
   b. Tracer sur le graphique une droite (D) passant par G qui réalise un bon ajustument afine du nuage de points.
   c. Déterminer graphiquement l'équation de la droite (D).
3. On réalise, à l'aide de la droite (D), un ajustement affine du nuage représenté. Utiliser l'équation de la droite (D) pour estimer :
   a. le pourcentage de cadres parmi les employés de l'entreprise en 2002 ;
   b. À partir de quelle année, le pourcentage de cadres parmi les employés dépasserait 30%.

Exercice 2 **4 points**

Pour mieux satisfaire ses clients, une agence de voyage leur a envoyé un questionaire. Parmi les 200 réponses reçues :
• 55 % des personnes déclarent partir en vacances en famille,
• Parmi les clients qui ne partent pas en famille, 60% préfèrent les voyages organisés et 20 % préfèrent les croisières.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Voyage organisé	Club de vacances	Croisière	Total
En famille			26	
Seul ou entre amis				
Total		73		200

2. On choisit un client au hasard parmi les deux cents qui ont répondu au questionnaire. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « le client choisi part en famille » ;
   B : « le client choisi préfère les croisières » ;
   C : « le client choisi ne part pas en club de vacances ».

3. Définir par une phrase chacun des évènements $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer les probabilités de ces évènements.
4. On choisit au hasard une personne qui a déclaré partir en vacances en famille. Quelle est la probabilité pour qu'elle préfère les clubs de vacances ?

Problème **11 points**

La partie A *de ce problème est consacrée à l'étude graphique de la fonction f définie ci-dessous. La partie* B *permet d'établir certaines propriétés de cette fonction, et de calculer une intégrale.*

Soient la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{1}{x} + 1 - \frac{\ln(x)}{x},$$

f' sa fonction dérîvée, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentée en annexe à deux échelles différentes (schéma 1 et schéma 2 par des copies de l'écran d'une calculatrice graphique. La feuille comportant ces deux graphiques devra être complétée et rendue avec la copie.

Partie A : Observations et conjectures.

1. En utilisant le schéma 1, indiquer le point où la dérivée f' semble s'annuler. Expliquer la réponse par un argument graphique.
2. Indiquer une équation de l'asymptote verticale à $\mathscr{C}$ qui semble se dégager sur le schéma 1.
3. On considère l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[1 - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.
   a. Interpréter graphiquement cette intégrale et hachurer la surface correspondante.
   b. En admettant que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\,1\ ;\ \mathrm{e}]$ (ce qui sera établi plus loin) et en calculant la valeur exacte de $f(\mathrm{e})$, montrer que :

$$\mathrm{e} - 2 \leqslant \mathrm{I} \leqslant \mathrm{e}.$$

Partie B - Calculs et preuves

1. Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   Interpréter graphiquement ce résultat et tracer la droite correspondante sur le schéma 2.
2. Vérifier que pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\,[-1 + x - \ln(x)]$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$. Ce résultat confirme t-il une observation de la **partie A** ? Expliquer la réponse.
3. étudier le signe de $f(x) - 1$ pour tout réel x strictement supérieur à 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
4. Déterminer f', en déduire son signe, et présenter les variations de f dans un tableau faisant aussi apparaître les limites trouvées aux questions précédentes.
5. **a.** Quelle est, pour $x > 0$, la dérivée $g'(x)$ de la fonction g définie par $g(x) = 1 + \ln x$?
   Montrer que pour tout $x > 0$, $1 - f(x) = g(x)g'(x)$.
   b. En déduire la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[1 - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

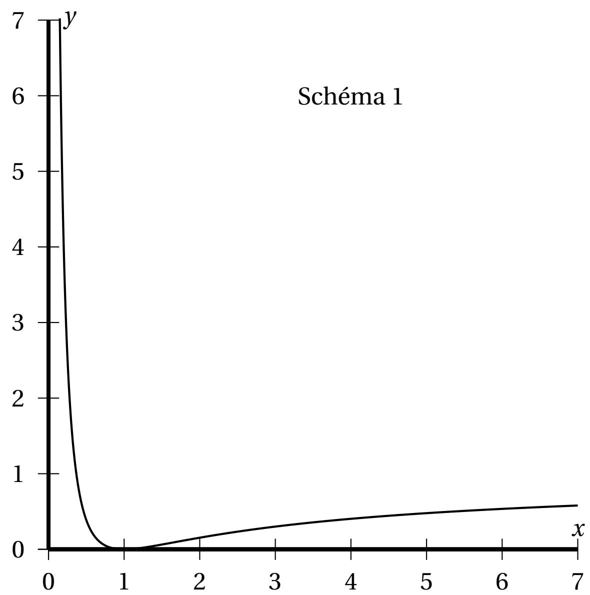
Schéma 1
y
x
0
1
2
3
4
5
6
7

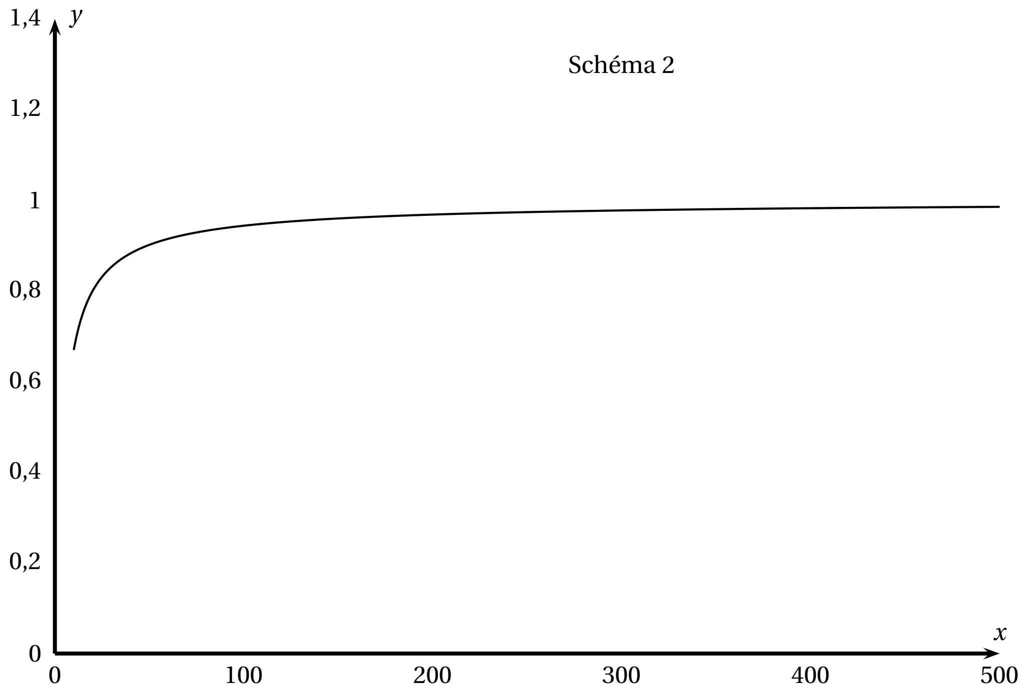
Schéma 2
y
x
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
100
200
300
400
500