Baccalauréat STT C.G.-I.G. Métropole septembre 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Dans une urne on a placé 26 cartons sur lesquels ont été peintes en bleu les 6 voyelles, en bleu les 10 premières consonnes et en rouge les 10 dernières consonnes de l'alphabet français.
Tous les résultats de cet exercice seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire au hasard un carton de l'urne.
   Soit A l'évènement : « la lettre obtenue est bleue »,
   B l'évènement : « la lettre obtenue est une consonne ».
   a. Calculer les probabilités de A et de B.
   b. Définir par une phrase l'évènement A ∩ B puis calculer la probabilité de A ∩ B.
   c. Définir par une phrase l'évènement A ∪ B puis calculer la probabilité de A ∪ B.
2. On tire au hasard un carton sur lequel la lettre est peinte en bleu. Quelle est la probabilité qu'on obtienne une consonne ?
3. On tire au hasard un carton sur lequel figure une consonne. Quelle est la probabilité que cette consonne soit bleue ?

EXERCICE 2 **6 points**

La production de l'entreprise AZ a été relevée depuis 1986. Le rang de l'année est noté x_i, la production est exprimée en tonnes et notée y_i ; les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Année t	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	600	700	650	800	750	100	400	350	1050
Année t	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	
x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	
y_i	1300	1050	1200	1300	1150	1500	1650	1500	

1. **a.** Construire le nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal d'unités graphiques :
   - axe des abscisses : 1 cm ;
   - axe des ordonnées : 1 cm pour 100 tonnes.

   b. Au cours de l'année t les installations de l'entreprise ont été presque détruites, indiquer l'année t et justifier votre réponse.
   c. On décide de pratiquer un ajustement linéaire, quelles années est-il raisonnable de supprimer ?
2. On considère les deux sous-nuages N_1 et N_2 associés respectivement aux 5 premières années et aux 9 dernières années (les années 1991, 1992, 1993 sont écartées).
   a. Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des 2 nuages N_1 et N_2.
   Placer ces points sur le graphique.

b. Montrer qu'une équation de la droite d'ajustement (G_1G_2) est $y = 60x + 520$.
Tracer cette droite.

c. Déterminer le point moyen G de la série privée des trois couples $\left(x_6,\ y_6\right),\ \left(x_7,\ y_7\right), \left(x_8,\ y_8\right)$.
Le point G appartient-il à la droite $(G_1\ G_2)$? Justifier par un calcul.

d. Déterminer graphiquement une estimation de la production en l'an 2005.

e. Par le calcul, estimer l'année à partir de laquelle la production dépassera 2 000 tonnes.

PROBLÈME **10 points**

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée en annexe, est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 4x + 2 - \mathrm{e}^{2x}.$$

Le point A a pour coordonnées (1 ; 3). Le point B a pour coordonnées (0 ; 1). La droite (AB) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en B.

Partie A

1. **a.** Déterminer une équation de la droite (AB) et en déduire $f'(0)$.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f'(x) \geqslant 0$.
   c. Quelle limite de f en $+\infty$ le graphique laisse-t-il prévoir ?
2. Justifier à l'aide du graphique que l'équation : $f(x) = 0$ possède deux solutions notées α et β.
   Donner, grâce à une lecture graphique, un encadrement de chacune de ces solutions à 0,5 près.

Partie B

1. **a.** En utilisant l'expression de $f(x)$, déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite (D), d'équation $y = 4x+2$, est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ quand x tend vers $-\infty$.
2. **a.** Verifier que pour tout x : $f(x) = \mathrm{e}^x\left(4\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^x\right)$.
   b. Quelle est la valeur de : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}$.
   c. Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.
3. **a.** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
   b. Dresser le tableau de variations de f. Calculer exactement le maximum.

Partie C

1. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.
2. Vérifier que la fonction définie par : $F(x) = 2x^2 + 2x - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ est une primitive de f.
3. En déduire l'aire de la partie hachurée en unités d'aires (on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près).

Annexe (à rendre avec la copie)

Courbe représentative de la fonction f