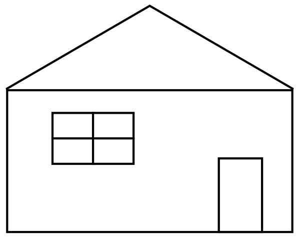
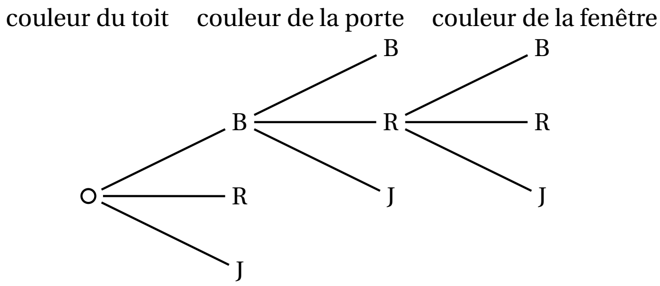
∾ Baccalauréat STT C.G-I.G. Pondichéry ∾
mars 2002

Exercice 1 **4 points**



Un enfant dispose de 3 crayons de couleurs différentes : un rouge noté R, un bleu noté B, un jaune noté J. Il veut colorier le toit, la fenêtre et la porte de la maison ci-contre. (Il peut colorier plusieurs éléments de la même couleur.)

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



   b. Quel est le nombre de dessins coloriés possibles ?

2. En supposant l'équiprobabilité dans le choix des couleurs déterminer la probabilité des évènements suivants :

   A : « le toit est rouge » ;

   B : « la porte et la fenêtre sont de la même couleur » ;

   C : « l'enfant a utilisé trois couleurs différentes » ;

   D : « l'enfant a utilisé au moins deux couleurs différentes ».

3. Sachant que l'enfant a colorié le toit en rouge, déterminer la probabilité de l'évènement E :

   E : « la porte et la fenêtre sont de la même couleur ».

Exercice 2 **5 points**

Une couturière fabrique des pantalons suivant deux modèles A ou B. Elle dispose de 15 m de tissuu par semaine et travaille 40 heures par semaine.
Le modèle A nécessite 1 mètre de tissu et 4 heures de travail.
Le modèle B nécessite 1,50 mètre de tissu et 2 heures de travail.
On note x le nombre de pantalons du modèle A et y le nombre de pantalons du modèle B fabriqués par semaine.

1. Montrer que les productions hebdomadaires de la couturière sont soumises aux contraintes suivantes :.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x \in \mathbb{N} & , & y \in \mathbb{N} \\ x \geqslant 0 & \text{et} & y \geqslant 0 \\ 2x+3y & \leqslant & 30 \\ 2x+y & \leqslant & 20 \end{array}\right.$$

2. Représenter graphiquement les contraintes de production dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On choisira 1 cm par unité

3. Utiliser le graphique pour répondre aux questions **a** et **b**.

a. Si la couturière produit dans sa semaine 8 pantalons du modèle A, combien de pantalons du modèle B peut-elle produire ? (Donner toutes les solutions).

b. Si la couturière produit dans sa semaine 8 pantalons du modèle B, combien de pantalons du modèle A peut-elle produire ? (Donner toutes les solutions).

4. Sur un pantalon du modèle A la couturière fait un bénéfice de 60 € et sur un pantalon du modèle B un bénéfice de 40 €. On suppose qu'elle vend toute sa production.

a. Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice hebdomadaire R qu'elle peut réaliser.

b. Représenter sur le graphique précédent les couples $(x\,;\,y)$ qui permettent de réaliser un bénéfice de 240 €.

c. Déterminer graphiquement le nombre de pantalons de chaque modèle à fabriquer par semaine pour que le bénéfice soit le plus grand possible (on admettra que ce bénéfice est obtenu pour un point de coordonnées x et y liés par $x + y = 12$).

d. Quel est alors le bénéfice en euros ?

Problème **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\text{I} =]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 + 2\ln x - (\ln x)^2.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. a. Calculer la limite de f en 0. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}$.

b. Mettre en facteur $(\ln x)^2$ dans $f(x)$, puis calculer la limite de f en $+\infty$.

2. Vérifier que pour tout x de I : $f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.

3. a. Résoudre dans I l'inéquation : $1 - \ln x > 0$.

b. En déduire le signe de $f(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Calculer $f\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$ et $f\left(\text{e}^2\right)$.

Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

5. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{1}{\text{e}}$.

6. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en donnant les valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près :

x	0,25	0,50	1	2	e	4	6	8	12	16	20	24
$f(x)$		0,13		3,91		3,85			1,80			$-0,74$

7. Tracer $\mathcal{C}$ le repère donné. Placer le point A et construire la tangente trouvée au).

8. On considère la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = -x\left[(\ln x)^2 - 4\ln x + 1\right]$$

Déterminer $g'(x)$ et en déduire une primitive de f sur I.

9. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire de la partie limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe $x'\text{O}x$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$.

On donnera une valeur décimale arrondie à 10^{-2} près par excès de cette aire.