Baccalauréat STT C.G. – I.G. Pondichéry avril 2003

EXERCICE 1 **6 points**

A. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère la figure représentée en annexe. On notera $\mathcal{D}$ la partie grisée.

1. Déterminer une équation de la droite (CB) et une équation de la droite (CD).
2. Écrire un système d'inéquations caractérisant la partie de plan grisée, frontières comprises. (On justifiera la réponse).

B. Une entreprise embauche des commerciaux, les uns sous contrat A travaillant 35 h et payés 550 euros par semaine, les autres sous contrat B travaillant 20 h et payés 220 euros par semaine. Le chef d'entreprise peut embaucher au plus :

— 8 personnes sous contrat A,
— 15 personnes sous contrat B.

Il dispose de 370 h de travail et d'un budget de 5 060 euros par semaine.

1. On note x le nombre de personnes embauchées sous contrat A, y le nombre de personnes sous contrat B. Traduire les informations ci-dessus par un système d'inéquations.
2. Vérifier que ce système est équivalent à celui trouvé dans la question **A 2** pour des nombres x et y entiers.
3. On estime à 30 le nombre de ventes hebdomadaires effectuées par un commercial sous contrat A, à 16 celles effectuées par un commercial sous contrat B.

   a. Exprimer en fonction de x et y le nombre global N de ventes effectuées par semaine.

   b. Les couples $(x\ ;\ y)$ correspondant à la réalisation de N ventes sont les coordonnées de points d'une droite D_N dont on donnera une équation. Construire sur la figure fournie en annexe la droite D_{320} correspondant au cas $N = 320$.

   c. Déterminer alors graphiquement le nombre de commerciaux sous contrat A et le nombre de commerciaux sous contrat B qu'il faut embaucher pour réaliser un nombre de ventes maximal par semaine. Quel est ce dernier nombre ? (On expliquera la méthode utilisée).

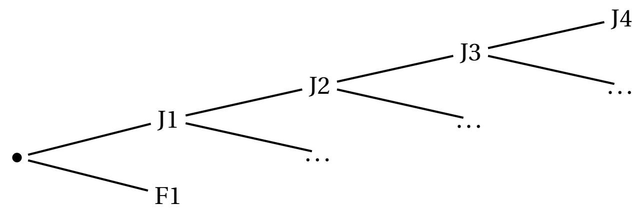
EXERCICE 2 **5 points**

Les parties A et B sont indépendantes.
Un professeur d'une classe de terminale STT donne à ses élèves l'interrogation suivante :

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\text{e}^x - x\right)$.
2. Soit $f(x) = \text{e}^{2x}$. Déterminer, pour tout réel x, $f'(x)$.
3. Résoudre : $\text{e}^{-2x} > \text{e}^{x+1}$.
4. Résoudre : $\text{e}^x < 3$.

A. Répondre aux questions posées ci-dessus
B. Pour chacune des questions de l'interrogation, le professeur propose deux réponses l'une juste, l'autre fausse. On les nommera par exemple pour la question 1 : J1, F1 ; pour la question 2 : J2, F2, etc. L'élève Lambda, n'ayant rien appris, répond au hasard à chacune des questions. Il donne une « réponse complète », c'est-à-dire une liste de quatre résultats, par exemple : (J1, F2, F3, J4).

1. Reproduire et achever l'arbre suivant donnant l'ensemble de toutes les réponses complètes possibles. Combien y a-t-il de réponses complètes possibles ?



2. Combien y a-t-il de réponses complètes ayant le premier résultat juste ?
3. Déterminer la probabilité des évènements suivants (les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles).
   a. Tous les résultats donnés sont justes.
   b. Le premier résultat donné est juste.
   c. La réponse contient exactement un résultat juste.
   d. La réponse contient au moins un résultat juste.
4. Sachant que le premier résultat est juste, quelle est la probabilité que l'élève ait exactement deux résultats exacts ? (Le résultat sera donné sous forme de fraction irréductible).

PROBLÈME **9 points**

A- Soit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 18\ln x + 18.$$

1. Calculer $g'(x)$ et vérifier que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{2(x-3)(x+3)}{x}$.
2. Déterminer alors le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
   Donner le tableau de variations de g en précisant la valeur exacte du minimum. (On ne demande pas d'étude de limites).
3. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

B - Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x^2 + 18\ln x)}{x}.$$

On notera $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (unités graphiques : 1 cm en abscisse, 0,5 cm en ordonnée).

1. a. Vérifier que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ $f(x) = \dfrac{x + 18\ln x}{x}$.
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   c. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.
   En déduire l'existence d'une asymptote.
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
3. Donner alors, en utilisant **A-3**, le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et construire le tableau de variation de f.

4. **a.** Prouver que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   b. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x) - x$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (D).

5. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au dixième.

x	0,5	1	2	3	5	10	15
$f(x)$							

6. Construire $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

7. Vérifier que la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 9(\ln x)^2$$

   est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

   Calculer l'aire (en unités d'aire) de la partie de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

ANNEXE (Exercice 1)
Document à rendre avec la copie