Baccalauréat STT C.G - G.I. Métropole juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Prix de vente en euros x_i	9	10	11	12	13	14	15	16
Nombre d'acheteurs éventuels y_i	120	100	90	70	60	50	40	30

1. Représenter graphiquement le nuage des points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
   Unités : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses ; 1 cm pour 10 sur l'axe des ordonnées.
2. **a.** Calculer les coordonnées du point moyen G_1 des quatre premiers points du nuage puis les coordonnées du point moyen G_2 des quatre derniers points. Placer ces points sur le graphique et tracer la droite (G_1G_2).
   b. Estimer graphiquement le prix maximum pour qu'il y ait au moins 20 acheteurs potentiels.
3. **a.** Montrer qu'une équation de la droite (G_1G_2) est $y = -12,5x + 226,25$.
   b. En utilisant cette équation, calculer le nombre d'acheteurs que l'on peut prévoir si le prix est fixé à 8 euros. Quelle serait alors la recette ?

EXERCICE 2 **6 points**

Le patron d'un restaurant prévoit l'achat de mobilier de jardin en vue d'aménager un parc pour ses clients. Il choisit deux modèles, l'un en bois, l'autre en métal.
Pour le modèle en bois, le lot comprend, une table, trois chaises, quatre fauteuils, le tout pour le prix de 2 400 euros.
Pour le modèle en métal, le lot comprend, une table, neuf chaises, deux fauteuils, le tout pour le prix de 1 600 euros.
Le projet est de disposer d'au moins 63 chaises et 30 fauteuils.

1. Soit x le nombre de lots en bois et y le nombre de lots en métal achetés par le restaurateur.
   Écrire le système des contraintes correspondant à ce problème.
2. Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système suivant (unité graphique : 1 cm).

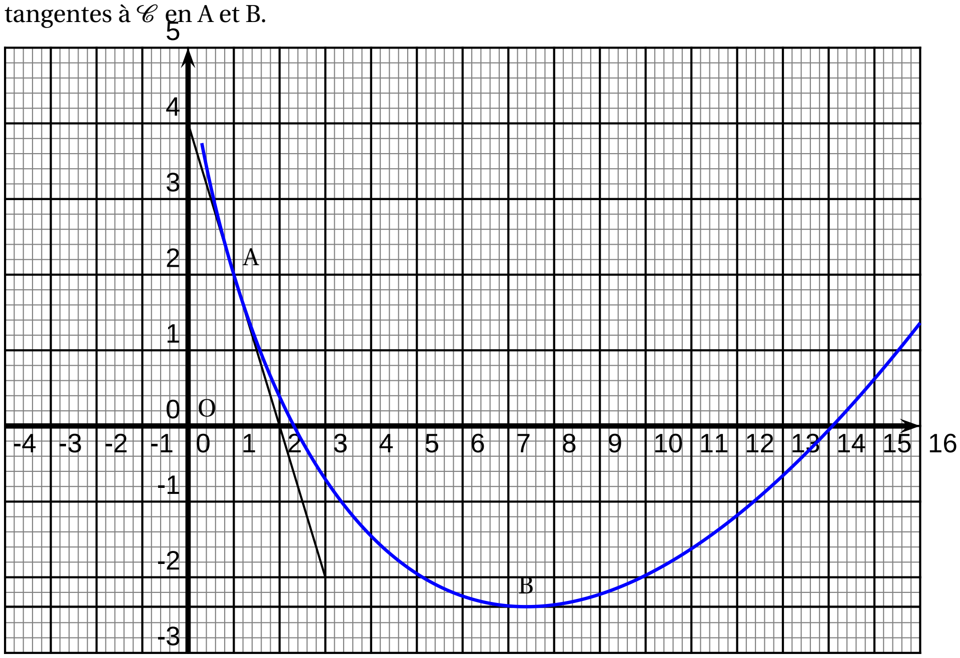
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0\\ y & \geqslant & 0\\ x+3y & \geqslant & 21\\ 2x+y & \geqslant & 15 \end{array}\right.$$

   On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.
3. Exprimer en fonction de x et y la dépense d correspondant à l'achat de x lots en bois et y lots en métal.
4. Déterminer l'équation de la droite D correspondant à une dépense de 21 600 euros et représenter D dans le repère précédent.
5. Déterminer graphiquement les couples à coordonnées entières occasionnant une dépense inférieure ou égale à 21 600 euros.
6. Quel est le couple à coordonnées entières qui assurera la dépense minimale ?
   Donner alors le montant de cette dépense.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Cette courbe passe par les points A $(1\,;\,2)$ et B d'abscisse e^2. On a représenté les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et B.



À l'aide du graphique, déterminer

1. les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(\text{e}^2)$.
2. un encadrement par deux entiers consécutifs de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Partie B

La fonction f précédente est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression

$$f(x) = x\ln(x) + ax + b.$$

En utilisant les résultats $f(1)$ et $f'(1)$, déterminer les valeurs de a et b.
Vérifier que la valeur de $f'(\text{e}^2)$ lue graphiquement convient.

Partie C

On admet que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) - 3x + 5.$$

1. **a.** On admet : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   b. Montrer que $f(x) = x[\ln(x) - 3] + 5$.
   Calculer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. Résoudre par le calcul $f'(x) \geqslant 0$.
3. Dresser le tableau complet des variations de f.

Partie D

On donne la fonction G définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2.$$

1. Montrer que $G'(x) = x\ln(x)$.
2. En déduire une primitive F de f.
3. Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.