∾ Baccalauréat STT C.G. - I.G. Nouvelle-Calédonie ∾ novembre 2001

Exercice 1 **6 points**

L'Association des fournisseurs d'accès et de services internet (AFA) a relevé les données suivantes :

Mois	01/ 1998	04/ 1998	07/ 1998	10/ 1998	01/ 1999	04/ 1999	07/ 1999	10/ 1999
Rang x_i du mois	1	2	3	4	5	6	7	8
Abonnements individuels y_i AFA (en milliers)	540	697	802	960	1 280	1 500	1 642	1 925

(*Source : http : //www.afa-france.com/html/chiffres/index.* htm)

On considère le nuage de points $M_i\left(x_i~;~y_i\right)$ associé au tableau ci-dessus, dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, unités : 2 cm par rang de mois en abscisses, 1 cm pour 100 milliers d'abonnements en ordonnées.

1. **a.** Représenter le nuage de points.

   b. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer G sur le graphique précédent.

2. On divise la série en deux parties, la première correspondant à l'année 1998 et la seconde à l'année 1999.

   a. Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chacune de ces deux parties.

   b. Déterminer une équation de la droite d'ajustement (G_1G_2) et tracer cette droite.

3. En utilisant l'équation de la droite d'ajustement

   a. Déterminer par le calcul une estimation du nombre d'abonnés en janvier 2001.

   b. Au cours de quel mois peut-on envisager un quintuplement (multiplication par 5) du nombre d'abonnés par rapport au mois de janvier 1988 ?

4. **a.** Déterminer le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre les mois de janvier 1998 et janvier 1999 (on arrondira au nombre entier le plus proche).

   b. En supposant que ce pourcentage reste constant, quel serait le nombre d'abonnés prévisible en janvier 2000, puis en janvier 2001 ?

Exercice 2 **4 points**

Une classe comprend 36 élèves âgés de 16,17 ou 18 ans.
Il y a 22 garçons dont 3 garçons âgés de 18 ans.
50 % des élèves sont des garçons âgés de 17 ans et 25 % des élèves sont âgés de 18 ans.
50 % des filles sont âgées de 17 ans.

1. Reproduire et compléter le tableau d'effectifs suivants :

sexes / âges	garçons	filles	Total
16 ans			
17 ans			
18 ans			
Total			36

Dans les questions suivantes, les résultats seront mis sous forme de fractions irréductibles.

2. Lors d'un cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève. Calculer la probabilité des évènements suivants :

a. A : « l'élève interrogé a 16 ans » ;

b. B : « l'élève interrogé est un garçon ».

3. a. Définir sous forme d'une phrase les évènements :

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}.$$

b. Calculer la probabilité de l'évènement C.

c. À l'aide des probabilités de A, B et C, calculer la probabilité de l'évènement D.

4. Le professeur décide d'interroger au hasard un garçon. Quelle est la probabilité de l'évènement E : « l'élève interrogé a 17 ans » ?

Problème

Partie A - étude d'une fonction

Soit la fonction numérique f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1,5 + \mathrm{e}^{-x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 - \mathrm{e}^{-x+1} = 0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{-x+1} \geqslant 0$.

2. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Vérifier que $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x+1}$. à l'aide de la question précédente, dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1,5$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

4. a. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse 0.

b. Tracer la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T.

5. a. Déterminer une fonction primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

b. En déduire l'aire, en cm^2, de la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
On donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-2} près.

Partie B – Application économique

Une entreprise fabrique un produit. Le coût total de fabrication d'un produit est donné par la fonction f précédente, où x est exprimé en tonnes et $f(x)$ est exprimé en milliers de francs.

1. Quelle quantité de produit faut-il fabriquer pour que le coût total de fabrication soit minimal ?

2. Une tonne de produit est vendue 750 F.

a. On appelle $R(x)$ la recette exprimée en milliers de francs procurée par la vente de x tonnes de produit. Justifier que $R(x) = 0,75x$.

b. Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.

c. On donne le signe de l'expression $-0,25 + \mathrm{e}^{-x+1}$ dans le tableau suivant :

x	0		$1 - \ln 0,25$		$+\infty$
signe de $-0,25 + \mathrm{e}^{-x+1}$		$+$	0	$-$	

On ne demande pas de justifier ce tableau.

Déterminer la production donnant le bénéfice maximum ; on donnera le résultat à 10^{-3} près.