

EXERCICE 1**6 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prend 1 cm comme unité.

Partie A — Restitution organisée de connaissances

Soit D le point de coordonnées (x_D, y_D, z_D) et P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls. Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :

$$d(D, P) = \frac{|ax_D + by_D + cz_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Partie B

On considère les points A de coordonnées $(3; -2; 2)$, B de coordonnées $(6; -2; -1)$, C de coordonnées $(6; 1; 5)$ et D de coordonnées $(4; 0; -1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
En déduire l'aire du triangle ABC .
2. Vérifier que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(1; -2; 1)$ est normal au plan (ABC) .
Déterminer une équation du plan (ABC) .
3. Calculer la distance du point D au plan (ABC) .
Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC) .
2. Q coupe les droites (DA) , (DB) et (DC) respectivement en E , F et G .
Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment $[DA]$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer le volume du tétraèdre $EFGD$.

EXERCICE 2**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}.$$

1. **a.** Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $(1+i)$.
b. Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.
c. Établir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $M' = M$).

On cherche à généraliser les propriétés **1. b** et **1. c** pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3. **a.** Montrer que pour tout nombre complexe z , le nombre $(z-2)(\bar{z}-2)$ est réel.
- b.** En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\frac{z'+2}{z-2}$ est réel.
- c.** Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB) . Généraliser les résultats de la question **1.c**.
5. Soit M un point distinct de A . Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f . Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2i$.

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On considère un carré direct $ABCD$ (c'est à dire un carré $ABCD$ tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi[)$ de centre I .

Soit J , K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(A) = I$ et $s(B) = K$.
2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s .
3. **a.** Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC) . En déduire l'image du point C par s .
- b.** Soit E l'image par s du point I . Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que les points A , Ω et E sont alignés.
(On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $(A; \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{10}\overrightarrow{AD})$.

1. Donner les affixes des points A , B , C et D .
2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe

$$z' = \frac{i}{2}z + 5 + 5i.$$

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s .
4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A , Ω et E .
5. Démontrer que les droites (AE) , (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω .

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x} \right) dx$$

1. a. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.
 b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on a $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
2. Soit J et K les intégrales définies par $J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx$ et $K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$.
 a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \frac{4}{e}$.
 b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$.
 c. Démontrer que $J + K = 4I$.
 d. Dédurre de tout ce qui précède un encadrement de I , puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I .

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A , B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. a. Combien y-a-t-il de mots-réponses possibles à ce questionnaire?
 b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
 Calculer la probabilité des événements suivants :
 E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».
 F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».
 G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).
2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
 On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.
 a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.
 b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.