Baccalauréat S 2019

L'intégrale de mai à novembre 2019

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

À la fin index des notions abordées

↜ Baccalauréat S Amérique du Nord 28 mai 2019 ↝

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes.*

On s'intéresse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.

1. Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètre et 1,65 millimètre.

a. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

b. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type σ_1.

Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X_1 - 1,5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

2. Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient à l'intervalle $[298~;~302]$. Le cahier des charges établit que, dans la production de tubes de type 2, une proportion de 2 % de tubes non « conformes pour la longueur » est acceptable.

On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de 250 tubes dans lequel 10 tubes se révèlent être non « conformes pour la longueur ».

a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

b. Décide-t-on de réviser la machine ? Justifier la réponse.

Partie B

Des erreurs de réglage dans la chaine de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes de type 2.

Une étude menée sur la production a permis de constater que :

— 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ;

— parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;

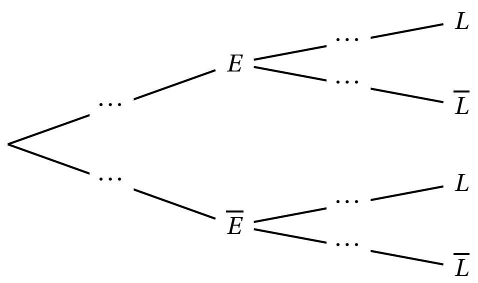
— 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube de type 2 au hasard dans la production et on considère les évènement s :

— E : « l'épaisseur du tube est conforme » ;

— L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :



1. Recopier et compléter entièrement cet arbre.

2. Montrer que la probabilité de l'évènement L est égale à 0,948.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z - \text{i} = \text{i}(z+1)$ a pour solution $\sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

Affirmation 2 : Pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + \text{e}^{2\text{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\,\text{e}^{-\text{i}x}$.

Affirmation 3 : Un point M d'affixe z tel que $|z - \text{i}| = |z+1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Affirmation 4 : L'équation $z^5 + z - \text{i} + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \geqslant 0$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant 1$.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**. En déduire la valeur de ℓ.

4. **a.** Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

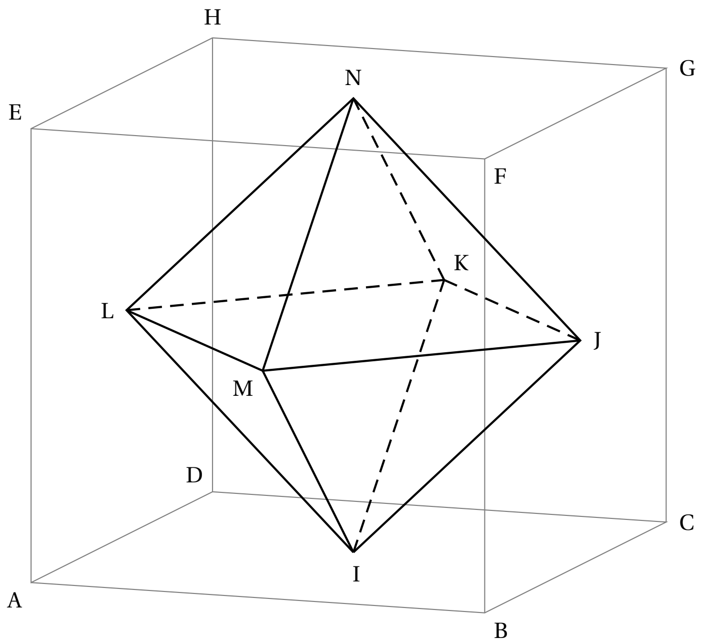
b. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.[1]

1. La plupart des calculatrices et même des tableurs sont incapables de traiter cette question donnant même des résultats faux. Elle peut être sautée.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme sur la figure ci-dessous.



Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{\text{AB}}~;~\overrightarrow{\text{AD}}~;~\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{2}~;~1\right)$.

2. **a.** Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{NC}}$ et $\overrightarrow{\text{ML}}$.

b. En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

c. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).

3. **a.** Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x - y + z = 1$.

b. La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.

c. Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux matrices colonnes $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}x \equiv x'~[5]\\y \equiv y'~[5]\end{array}\right.$.

Deux matrices carrées d'ordre 2 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} a \equiv a'\ [5] \\ b \equiv b'\ [5] \\ c \equiv c'\ [5] \\ d \equiv d'\ [5] \end{array}\right.$.

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous.

— Ils choisissent une matrice M carrée d'ordre 2, à coefficients entiers.

— Leur message initial est écrit en lettres majuscules sans accent.

— Chaque lettre de ce message est remplacée par une matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ déduite du tableau ci-contre : x est le chiffre situé en haut de la colonne et y est le chiffre situé à la gauche de la ligne ; par exemple, la lettre T d'un message initial correspond à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

— On calcule une nouvelle matrice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en multipliant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à gauche par la matrice M :
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

— On calcule r' et t' les restes respectifs des divisions euclidiennes de x' et y' par 5.

— On utilise le tableau ci-contre pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à la matrice colonne $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$.

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

Remarque : la lettre W est remplacée par les deux lettres accolées V.

1. Bob et Alice choisissent la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U » puis coder le message « TE ».

b. On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que les matrices PM et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

c. On considère A, A′ deux matrices d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et
$\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathrm{Z}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers congrues modulo 5.
Montrer alors que les matrices AZ et A′Z′ sont congrues modulo 5.

Dans ce qui suit on admet que si A, A′ sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et si B, B′ sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 alors les matrices produit AB et A'B' sont congrues modulo 5.

d. On note $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers. Déduire des questions précédentes que si MX et Y sont congrues modulo 5 alors les matrices X et PY sont congrues modulo 5 ; ce qui permet de « décoder » une lettre chiffrée par la procédure utilisée par Alice et Bob avec la matrice M choisie.

e. Décoder alors la lettre « D ».

2. On souhaite déterminer si la matrice $R = \begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$ peut être utilisée pour coder un message.

a. On pose $S = \begin{pmatrix}2 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice RS et la matrice $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

b. On admet qu'un message codé par la matrice R peut être décodé s'il existe une matrice T telle que les matrices TR et I soient congrues modulo 5. Montrer que si c'est le cas alors les matrices TRS et S sont congrues modulo 5 (par la procédure expliquée en question **1. d.** pour le codage avec la matrice M).

c. En déduire qu'un message codé par la matrice R ne peut être décodé.

Sommaire Index

∽ Baccalauréat S Liban 31 mai 2019 ∾

Durée : 4 heures

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par

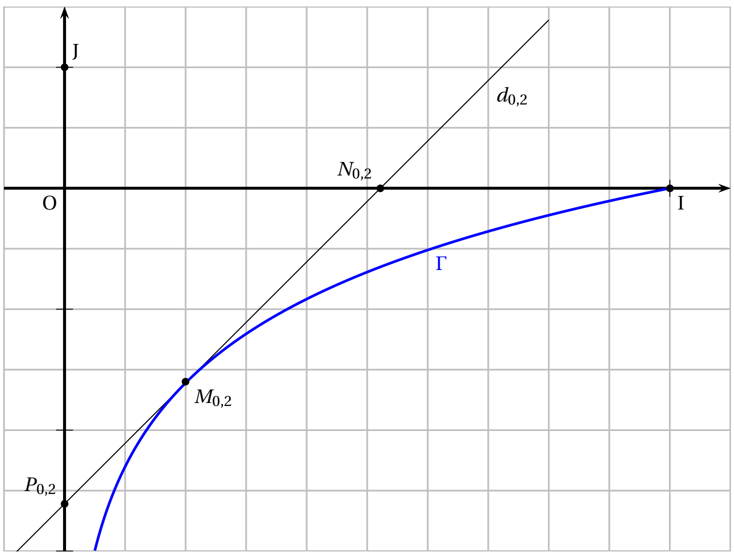
$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

   a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in\,]0\,;\,1]$, $f'(x) = (\ln x+1)(\ln x-1)$.

   b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.
Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.
On s'intéresse à l'aire du triangle $\text{O}N_aP_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0{,}2$ et on donne la figure ci-dessous.



   a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $\text{O}N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

   b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

   c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $\text{O}N_{0,2}P_{0,2}$.
   Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle $\text{O}N_aP_a$ en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1 + \text{i}$ et $z_{\text{B}} = \frac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A$'$ image du point A par la fonction f.

b. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B$'$ image du point B par la fonction f.

c. Sur la copie, placer les points A, B, A$'$ et B$'$ dans le repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Pour les points B et B$'$, on laissera les traits de construction apparents.

2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\text{e}^{\text{i}\theta}$.

a. Montrer que $z' = \frac{1}{r}\text{e}^{\text{i}(\pi-\theta)}$.

b. Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_{\text{K}} = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

a. Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

b. Soit $z = x + \text{i}y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

c. Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

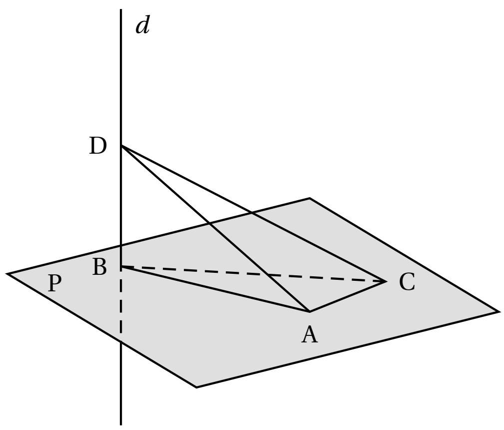
Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.

3. **a.** Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.

b. On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A(3 ; 1 ; −5) et la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2t+1\\ y &=& -2t+9\\ z &=& t-3\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.

2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B(5 ; 5 ; −1),

3. Justifier que le point C(7 ; 3 ; −9) appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.

b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.

c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point D(9; 1; 1) qui est un des deux points solutions de la question **4. c.** de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.
En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

— à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9;
— si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95;
— si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. **a.** Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.

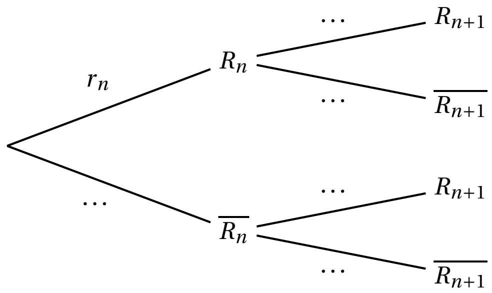
b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.

d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}75r_n + 0{,}2$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$.

d. Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R.
Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.
Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

— dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
— ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
— enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser sa matrice inverse.

b. Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Calculer PDP.

d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

On admet par la suite que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix}0{,}5^n & 3\times 0{,}5^n - 3\times 0{,}25^n\\ 0 & 0{,}25^n\end{pmatrix}$.

3. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

4. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.

a. Montrer que tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.

b. On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^n V_0$.

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \begin{pmatrix}-18\times 0{,}5^n + 9\times 0{,}25^n + 10\\ -3\times 0{,}25^n + 4\end{pmatrix}$.

5. **a.** Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.

b. Déterminer la limite de la suite (a_n).

c. On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.

Sommaire Index

∽ Baccalauréat S Centres étrangers [2] 13 juin 2019 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q. C. M.) qui envisage quatre situations relatives à une station de ski.
Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. ***Aucune justification n'est demandée****. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. Une étude statistique a établi qu'un client sur quatre pratique le surf.

Dans une télécabine accueillant 80 clients de la station, la probabilité arrondie au millième qu'il y ait exactement 20 clients pratiquant le surf est :

a. 0,560 **b.** 0,25 **c.** 1 **d.** 0,103

2. L'épaisseur maximale d'une avalanche, exprimée en centimètre, peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 150$ cm et d'écart-type inconnu.

On sait que $P(X \geqslant 200) = 0{,}025$. Quelle est la probabilité $P(X \geqslant 100)$?

a. On ne peut pas répondre car il manque des éléments dans l'énoncé. **b.** 0,025 **c.** 0,95 **d.** 0,975

3. Dans un couloir neigeux, on modélise l'intervalle de temps séparant deux avalanches successives, appelé temps d'occurrence d'une avalanche, exprimé en année, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle.

On a établi qu'une avalanche se déclenche en moyenne tous les 5 ans. Ainsi $E(T) = 5$.

La probabilité $P(T \geqslant 5)$ est égale à :

a. 0,5 **b.** $1 - \mathrm{e}^{-1}$ **c.** e^{-1} **d.** e^{-25}

4. L'office de tourisme souhaite effectuer un sondage pour estimer la proportion de clients satisfaits des prestations offertes dans la station de ski.

Pour cela, il utilise un intervalle de confiance de longueur 0,04 avec un niveau de confiance de 0,95.

Le nombre de clients à interroger est :

a. 50 **b.** 2 500 **c.** 25 **d.** 625

2. Pondichéry

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
    U ←
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0{,}7$ puis pour $u_1 = 0{,}8$.
Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0{,}7$	Pour $u_1 = 0{,}8$
0,4	0,6
0,2	0,8
−0,2	2,2
−2	10
−13	59
−92	412
−737	3 295
−6 634	29 654
−66 341	296 539
−729 752	3 261 928
−8 757 025	39 143 135
−113 841 326	508 860 754

Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0{,}7$? Et si $u_1 = 0{,}8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $F(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.
2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

Utiliser cette formule pour calculer I_2.

4. **a.** Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}$.

   b. Justifier que : $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par : $1!=1$
$2! = 2 \times 1$
et si $n \geqslant 3$: $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$
On a ainsi par exemple
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2!$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3!$
$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7!$
Et, plus généralement :

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$

On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

a. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0{,}7$.

b. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0{,}8$.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\dfrac{1}{z}$ soient alignés.
Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

Partie A : étude d'exemples

1. Un premier exemple

Dans cette question, on pose $z = \mathrm{i}$.

a. Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

b. Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. Une équation

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

3. Un deuxième exemple

Dans cette question, on pose : $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de z, puis celles des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

b. Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

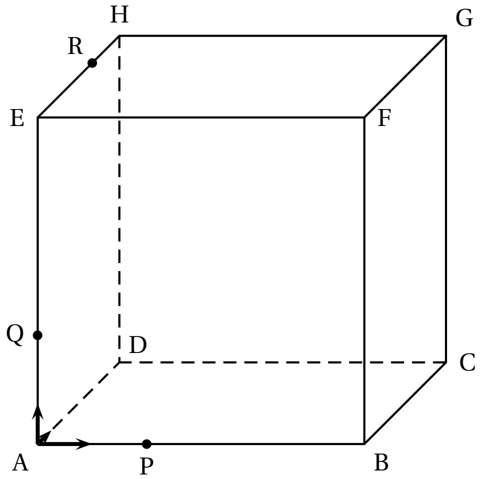
Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2. On rappelle que si, $\overrightarrow{U}$ est un vecteur non nul et $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{U}}$ et $z_{\overrightarrow{V}}$, les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\overrightarrow{V}} = kz_{\overrightarrow{U}}$.
   En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.
3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.
   Justifier que : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy + y)$.
4. **a.** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.
   b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6~;~0~;~0),F(6~;~0~;~6) \text{ et } R(0~;~4~;~6).$$

1. **a.** Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.
   b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\,(1~;~b~;~c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR).
   c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.
2. **a.** On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
   Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\dfrac{8}{3}~;~\dfrac{10}{3}~;~\dfrac{8}{3}\right)$.
   c. Calculer la distance ΩI.
3. On considère les points J(6 ; 4 ; 0) et K(6 ; 6 ; 2).
   a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).
   b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.
   c. Sur la figure donnée en annexe, tracer la section du cube par le plan (PQR).
   On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A :

Les questions 1., 2. *et* 3. *sont indépendantes*

1. Sans justifier, donner deux nombres premiers x, et y tels que $40 = x + y$.
2. On considère l'équation $20x + 19y = 40$, où x et y désignent deux, entiers relatifs.
   Résoudre cette équation.
3. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40 = 2^2 + 6^2$. On veut savoir si 40, est aussi différence de deux carrés, autrement dit s'intéresser à l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.
   a. Donner la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers.
   b. Montrer que, si x et y désignent des entiers naturels, les nombres $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.
   c. Déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2 - y^2 = 40$ où x et y désignent deux entiers naturels.

Partie B : « sommes » de cubes

Les questions 1. *et* 2. *sont indépendantes.*

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels.
Par exemple :

$$\begin{array}{rcl} 13 & = & 4^3 + 7^3 + 7^3 - 9^3 - 2^3 \\ 13 & = & -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3 \\ 13 & = & 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 \end{array}$$

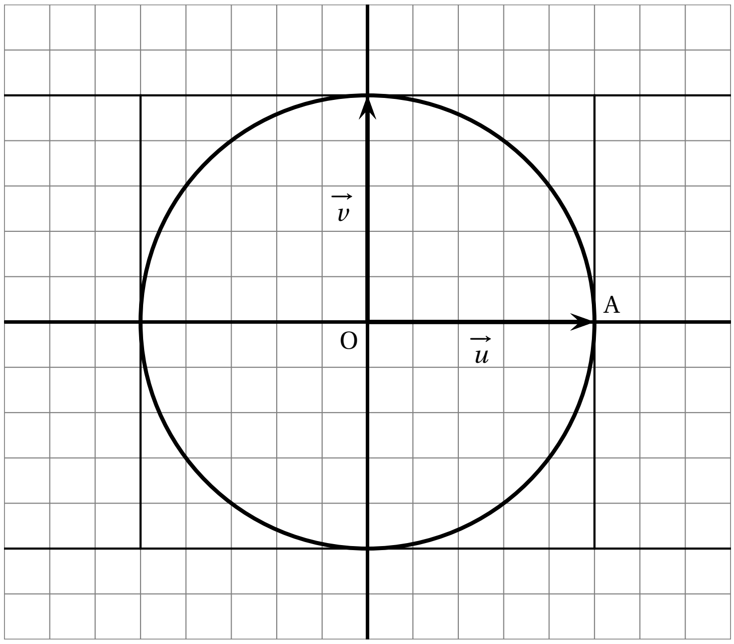
Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « sommes » de cubes à la place de « sommes ou différence de cubes d'entiers naturels ».
Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

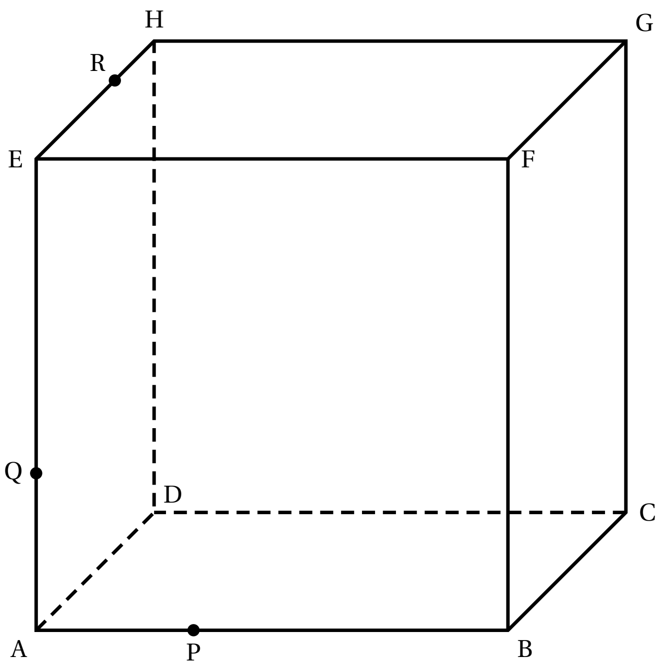
1. **a.** En utilisant l'égalité $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$, donner une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes.
   b. On admet que pour tout entier naturel n on a :
   $$6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$$
   En déduire une décomposition de 48 en « somme » de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes, différente de celle donnée en **1. a.**)
2. Le nombre 40 est une « somme » de 4 cubes : $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$.
   On veut savoir si 40 peut être décomposé en « somme » de 3 cubes.
   a. Recopier et compléter sans justifier :

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9					1				

   b. On déduit du tableau précédent que, pour tout entier naturel n, l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1.
   Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.

Annexe (à rendre avec la copie)





Sommaire Index

↜ Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2019 ↝

EXERCICE 1 **6 points**

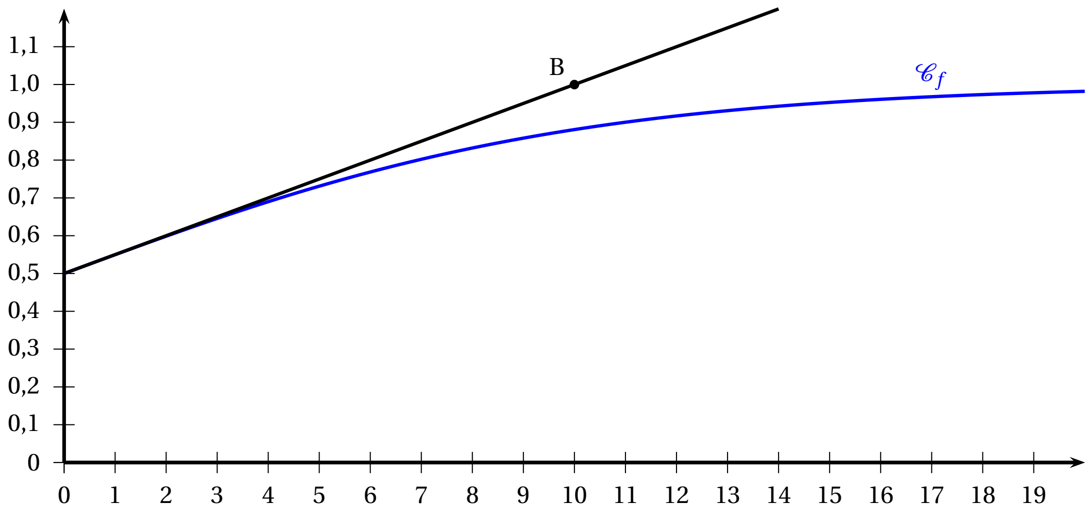
COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que $a = 1$.
On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
   Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.
4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2}\int_{8}^{10} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}.$$

   b. En déduire une primitive de la fonction p sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   c. Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

EXERCICE 2 **5 points**

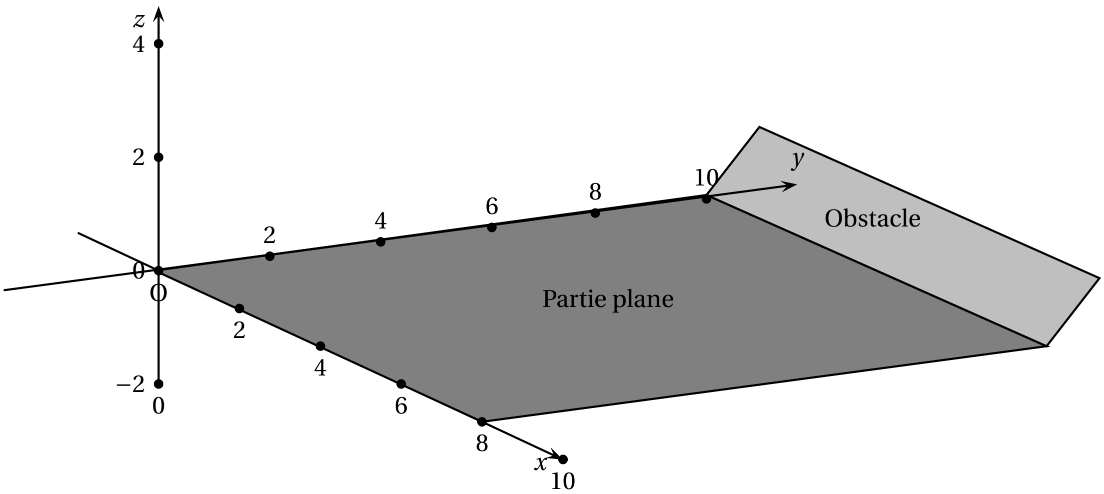
COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.
On considère un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :

$$\mathrm{O}(0\ ;\ 0\ ;\ 0),\ \mathrm{P}(0\ ;\ 10\ ;\ 0),\ \mathrm{Q}(0\ ;\ 11\ ;\ 1),\ \mathrm{T}(10\ ;\ 11\ ;\ 1), v\mathrm{U}(10\ ;\ 10\ ;\ 0) \text{ et } \mathrm{V}(10\ ;\ 0\ ;\ 0)$$

La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2 ; 4 ; 0,25) et B(2 ; 6 ; 0,75) ;
- le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4 ; 6 ; 0,25) et D(2 ; 6 ; 0,25).

Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(0\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).
3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2\,;\,\dfrac{37}{3}\,;\,\dfrac{7}{3}\right)$.
4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.
L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.
Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).
Il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{\text{A}M} = a\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{C}N} = b\overrightarrow{\text{CD}}$.
On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0{,}5a)$.
2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).
   Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.
3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.
On considère le nombre complexe $c = \dfrac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\dfrac{1}{c}$.

1. **Affirmation 1 :**
   Le nombre c peut s'écrire $c = \dfrac{1}{4}\left(1-\text{i}\sqrt{3}\right)$.
2. **Affirmation 2 :**
   Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.
3. **Affirmation 3 :**
   Les points O, S et T sont alignés.
4. **Affirmation 4 :**
   Pour tout entier naturel non nul n,
   $$|c| + \left|c^2\right| + \ldots + \left|c^n\right| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

EXERCICE 4 **6 points**
CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match.
On dispose des informations suivantes :

- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les évènements :

- M : « le téléspectateur a regardé le match » ;
- E : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note x la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Déterminer la probabilité de $M \cap E$.

3. **a.** Vérifier que $p(E) = 0{,}44x + 0{,}14$.

b. En déduire la valeur de x.

4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?

Partie B

Pour déterminer l'audience des chaînes de télévision, un institut de sondage recueille, au moyen de boîtiers individuels, des informations auprès de milliers de foyers français.
Cet institut décide de modéliser le temps passé, en heure, par un téléspectateur devant la télévision le soir du match, par une variable aléatoire T suivant la loi normale d'espérance $\mu = 1{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}5$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un téléspectateur ait passé entre une heure et deux heures devant sa télévision le soir du match ?

2. Déterminer l'arrondi à 10^{-2} du réel t tel que $P(T \geqslant t) = 0{,}066$.
Interpréter le résultat.

Partie C

La durée de vie d'un boîtier individuel, exprimée en année, est modélisée par une variable aléatoire notée S qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif. On rappelle que la densité de probabilité de S est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans.
L'usine qui fabrique les boîtiers affirme que leur durée de vie moyenne est supérieure à trois ans.
L'affirmation de l'usine est-elle correcte ? La réponse devra être justifiée.

EXERCICE 4 **6 points**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

On étudie l'évolution quotidienne des conditions météorologiques d'un village sur une certaine période. On suppose que, pour un jour donné, il existe trois états météorologiques possibles : « ensoleillé », « nuageux sans pluie » et « pluvieux ».
On sait que :

- si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,5 et celle qu'il soit pluvieux est 0,1 ;
- si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,2 et celle qu'il soit pluvieux est 0,7 ;
- si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est 0,6 et celle qu'il soit ensoleillé 0,2.

Pour tout entier naturel n, on note les évènements :

- A_n : « le temps est ensoleillé au bout de n jours » ;
- B_n : « le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours » ;
- C_n : « le temps est pluvieux au bout de n jours ».

Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités des évènements A_n, B_n et C_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$.
On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé.
On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}1b_n + 0{,}2c_n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}3a_n - 0{,}1b_n + 0{,}2$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}2$.

2. On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad R \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + R$.

b. Soit $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tel que $Y = MY + R$. Démontrer que $\alpha = \beta = 0{,}25$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - Y$.

a. En utilisant la question 2., vérifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, $V_n = M^n V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel strictement positif n,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 0{,}2^n - 0{,}1^n & 0{,}1^n - 0{,}2^n \\ 2 \times 0{,}2^n - 2 \times 0{,}1^n & 2 \times 0{,}1^n - 0{,}2^n \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer l'expression de a_n en fonction de l'entier strictement positif n.

b. Déterminer la limite de la suite (a_n).

c. On admet que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0{,}5 + 3 \times 0{,}1^n - 3{,}5 \times 0{,}2^n$.
La probabilité que le temps soit pluvieux au bout de n jours peut-elle dépasser 0,5 ?

Sommaire Index

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie 19 juin 2019

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

Un commerçant vient de s'équiper d'un distributeur de glaces à l'italienne.

1. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne de son distributeur de glaces à l'italienne est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif (on rappelle que la fonction f de densité de la loi exponentielle est donnée sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

   Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur, c'est-à-dire l'espérance mathématique de X, est de 10 mois.

   a. Justifier que $\lambda = 0{,}1$.

   b. Calculer la probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.

   c. Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année ? Justifier.

   d. Le commerçant remplacera son distributeur de glaces à l'italienne au bout d'un temps t, exprimé en mois, qui vérifie que la probabilité de l'évènement $(X > t)$ est égale à 0,05.

   Déterminer la valeur de t arrondie à l'entier.

2. La notice du distributeur de glaces précise que le distributeur fournit des glaces à l'italienne dont la masse est comprise entre 55 g et 65 g.

   On considère la variable aléatoire M représentant la masse, en grammes, d'une glace distribuée. On admet que M suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart-type 2,5.

   a. Calculer la probabilité que la masse d'une glace à l'italienne choisie au hasard parmi celles distribuées soit comprise entre 55 g et 65 g.

   b. Déterminer la plus grande valeur de m, arrondie au gramme près, telle que la probabilité $P(M \geqslant m)$ soit supérieure ou égale à 0,99.

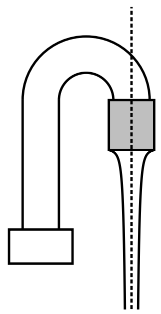
3. Le distributeur de glaces à l'italienne permet de choisir un seul des deux parfums : vanille ou fraise. Pour mieux gérer ses achats de matières premières, le commerçant fait l'hypothèse qu'il y aura en proportion deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise. Le premier jour d'utilisation de son distributeur, il constate que sur 120 consommateurs, 65 ont choisi de la glace à la vanille.

   Pour quelle raison mathématique pourrait-il mettre en doute son hypothèse ? Justifier.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.



On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe 1** par la courbe C dans un repère orthonormé.

Partie A

On considère que la courbe C donnée en **annexe 1** est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(H) : f(1) = 0 \qquad f'(1) = 0{,}25 \quad \text{et} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty.$$

1. La fonction f peut-elle être une fonction polynôme du second degré ? Pourquoi ?
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = k\ln x$.
   - **a.** Déterminer le réel k pour que la fonction g respecte les trois conditions (H).
   - **b.** La courbe représentative de la fonction g coïncide-t-elle avec la courbe C ? Pourquoi ?
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $h(x) = \dfrac{a}{x^4} + bx$ où a et b sont des réels.

   Déterminer a et b pour que la fonction h respecte les trois conditions (H).

Partie B

On admet dans cette partie que la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right).$$

1. Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ une unique solution qui sera notée α. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
2. On admet que le volume d'eau en cm^3, contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule : $V = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} \pi x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Soit u la fonction dérivable sur $]0\,;\,1]$ définie par $u(x) = \dfrac{1}{2x^2}$. Déterminer sa fonction dérivée.
   - **b.** Déterminer la valeur exacte de V. En utilisant la valeur approchée de α obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de V.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.
2. **a.** Calculer $I_0 - I_1$.
   - **b.** En déduire I_1.
3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
   - **b.** Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n.
4. Soit n un entier naturel non nul.

   On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   - **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.

b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie** :

- ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 12, AD = 18 et AE = 6
- EBDG est un tétraèdre.

.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine A dans lequel les points B, D et E ont pour coordonnées respectives B(12 ; 0 ; 0), D(0 ; 18 ; 0) et E(0 ; 0 ; 6).

1. Démontrer que le plan (EBD) a pour équation cartésienne $3x + 2y + 6z - 36 = 0$.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

b. En déduire que la droite (AG) coupe le plan (EBD) en un point K de coordonnées (4 ; 6 ; 2) .

3. La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) ? Justifier.

4. **a.** Soit M le milieu du segment [ED]. Démontrer que les points B, K et M sont alignés.

b. Construire alors le point K sur la figure donnée en annexe 2 à rendre avec la copie.

5. On note P le plan parallèle au plan (ADE) passant par le point K.

a. Démontrer que le plan P coupe le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED).

b. Construire alors sur l'**annexe 2** à rendre avec la copie l'intersection du plan P et de la face EBD du tétraèdre EBDG.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 1$, $v_0 = 0$, et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On a calculé les premiers termes de la suite (v_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_n	0	1	4	15	56	209	780	2 911	10 864	40 545	151 316	564 719	2 107 560

1. Conjecturer les valeurs possibles du chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

2. On admet que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a. Justifier que pour tout entier nature n, $\begin{cases} u_{n+3} &= 26u_n + 45v_n \\ v_{n+3} &= 15u_n + 26v_n \end{cases}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n : $v_{n+3} \equiv v_n\ [5]$.

3. Soit r un entier naturel fixé. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel q, $v_{3q+r} \equiv v_r$ [5].
4. En déduire que pour tout entier naturel n le terme v_n est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.
5. Conclure quant à l'ensemble des valeurs prises par le chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

Partie B

L'objectif de cette partie est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant la matrice M.

Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. Dans ce cas, $\sqrt{3}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls, avec q le plus petit entier naturel possible.

1. Montrer que $q < p < 2q$.
2. On admet que la matrice M est inversible. Donner son inverse M^{-1} (aucune justification n'est attendue).

   Soit le couple $(p'\ ;\ q')$ défini par $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.
3.
   a. Vérifier que $p' = 2p - 3q$ et que $q' = -p + 2q$.

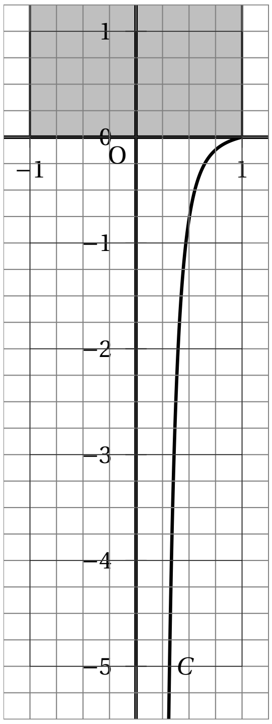
   b. Justifier que $(p'\ ;\ q')$ est un couple d'entiers relatifs.

   c. On rappelle que $p = q\sqrt{3}$. Montrer que $p' = q'\sqrt{3}$.

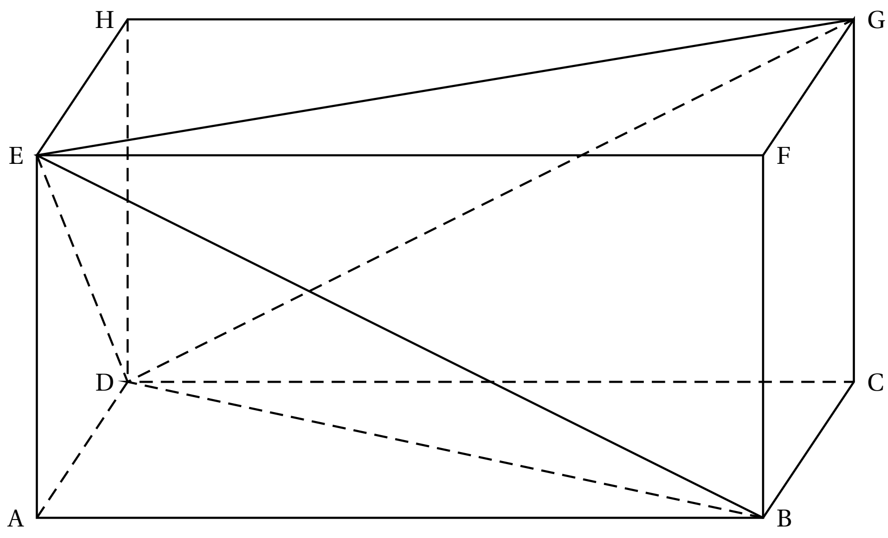
   d. Montrer que $0 < q' < q$.

   e. En déduire que $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

Annexe 1 (exercice 2) :



Annexe 2 (exercice 4 pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité) : à rendre avec la copie



Sommaire Index

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Asie 20 juin 2019

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   c. Déterminer la limite de la suite (T_n).
4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
    T ← 0,8T + 2
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

   a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
   Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0{,}2\theta(t)$.

   a. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0{,}2t}}$.
   Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.

   b. En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.
   En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

   c. Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0~;~+\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$:

$$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0{,}2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

   Une personne aime boire son café à 40 °C.
   Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0~;~+\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
   Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Il est attribué un point si la lettre correspond à l'affirmation exacte, 0 sinon.

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ de l'espace.

Les quatre questions sont indépendantes. **Aucune justification n'est demandée.**

1. On considère le plan P d' équation cartésienne $3x + 2y + 9z - 5 = 0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 4t + 3\\ y & = & -t + 2\\ z & = & -t + 9 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

   Affirmation A : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(3~;2~;9)$.

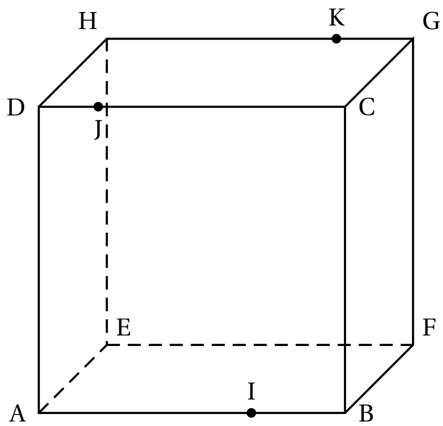
   Affirmation B : le plan P et la droite d sont orthogonaux.

   Affirmation C : le plan P et la droite d sont parallèles.

   Affirmation D : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353~;~91~;~98)$.

2. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les points I, J et K définis par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{HK}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}.$$



   Affirmation A : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un triangle.

   Affirmation B : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un quadrilatère.

   Affirmation C : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un pentagone.

   Affirmation D : la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un hexagone.

3. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l c r}x&=&t+2\\y&=&2\\z&=&5t-6\end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, et le point A$(-2~;~1~;~0)$. Soit M un point variable de la droite d.

   Affirmation A : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.
   Affirmation B : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.
   Affirmation C : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(-2~;~1~;~0)$.
   Affirmation D : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(2~;~2~;~-6)$.

4. On considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ et le plan P' d'équation cartésienne $2x-y+2=0$.

   Affirmation A : les plans P et P' sont parallèles.
   Affirmation B : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par les points A$(5;12;10)$ et B$(3;1;2)$.
   Affirmation C : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point C$(2;6;5)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\,(1~;~2~;~2)$.
   Affirmation D : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point D$(-1~;~0~;~0)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v}\,(3~;~6~;~5)$.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*
Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au **millième**.

Partie A

En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.
En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio. De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.
On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

- F l'évènement « la personne choisie est une femme »;
- H l'évènement « la personne choisie est un homme »;
- B l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

1. Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements F et B.
2. **a.** Montrer que $P(F \cap B) = 0{,}506$.
   b. En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.
3. Calculer $P_H\left(\overline{B}\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans un supermarché, un chef de rayon souhaite développer l'offre de produits bio.
Afin de justifier sa démarche, il affirme à son responsable que 75 % des clients achètent des produits bio au moins une fois par mois.
Le responsable souhaite vérifier ses dires. Pour cela, il organise un sondage à la sortie du magasin.
Sur 2 000 personnes interrogées, 1 421 répondent qu'elles consomment des produits bio au moins une fois par mois.
Au seuil de 95 %, que peut-on penser de l'affirmation du chef de rayon ?

Partie C

Pour promouvoir les produits bio de son enseigne, le responsable d'un magasin décide d'organiser un jeu qui consiste, pour un client, à remplir un panier avec une certaine masse d'abricots issus de l'agriculture biologique. Il est annoncé que le client gagne le contenu du panier si la masse d'abricots déposés est comprise entre 3,2 et 3,5 kilogrammes.
La masse de fruits en kg, mis dans le panier par les clients, peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f définie sur l'intervalle $[3;4]$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}.$$

Rappel : on appelle fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ toute fonction f définie, continue et positive sur $[a\,;\,b]$, telle que l'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$ est égale à 1.

1. Vérifier que la fonction f précédemment définie est bien une fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle $[3;4]$.

2. Le magasin annonce : « Un client sur trois gagne le panier ! ».
Cette annonce est-elle exacte ?

3. Cette question a pour but de calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
On rappelle que, pour une variable aléatoire X de densité f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, $\mathrm{E}(X)$ est donnée par : $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que la fonction G, définie sur l'intervalle $[3;4]$ par $G(x) = \ln(x-2) - \dfrac{x}{x-2}$, est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x-2)^2}$ sur cet intervalle.

b. En déduire la valeur exacte de $\mathrm{E}(X)$, puis sa valeur arrondie au centième.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématique

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2 + \left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 8\mathrm{i} = 0 \quad (E).$$

a. Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

b. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2 + \left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 8\mathrm{i} = (z+2\mathrm{i})\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right).$$

c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

d. Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2\mathrm{i}$, $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

a. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

b. Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.

c. On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_{L} du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

3. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

a. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

b. À l'aide de la question **3. a.**, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi la spécialité mathématique

On note r l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes, à coefficients entiers.

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de r. À U et V, on associe la matrice $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ et le nombre $d(A) = u_1 v_2 - u_2 v_1$.

On dit que (U, V) est une base de r si et seulement si, pour tout élément X de r, il existe un unique couple d'entiers relatifs $(a\,;\,b)$ tel que $X = aU + bV$.

1. Dans cette question, on pose $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

a. Montrer que X ne peut pas s'écrire $X = aU + bV$, avec a et b entiers relatifs.

b. Le couple (U, V) est-il une base de r ?

Dans la suite de l'exercice, on souhaite illustrer sur un exemple la propriété : « si $d(A) = 1$, alors (U, V) est une base de r ».

2. En posant $U = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$ le but de cette question est de déterminer $V \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tel que $d(A) = 1$. On rappelle dans ce cas que la matrice A associée au couple (U, V) s'écrit : $A = \begin{pmatrix} 6 & v_1 \\ -11 & v_2 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer la condition $d(A) = 1$ par une égalité reliant v_1 et v_2.

b. On considère l'équation (E) : $11x + 6y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
Donner une solution particulière de l'équation (E).

c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des entiers relatifs.

d. Déterminer alors une matrice $V \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de r vérifiant d'une part l'égalité $d(A) = 1$ et, d' autre part, la condition $0 \leqslant v_1 \leqslant 10$.

3. Dans cette question, on pose $U = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Ainsi $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -11 & -9 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

b. Soit X un élément de r.
Montrer que l'égalité $X = aU + bV$ s'écrit matriciellement $X = A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

c. Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(a\,;\,b)$ tel que $X = aU + bV$, c'est-à-dire tel que (U, V) est une base de r.

d. Déterminer ce couple $(a\,;\,b)$ lorsque $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Sommaire Index

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole–La Réunion 21 juin 2019

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

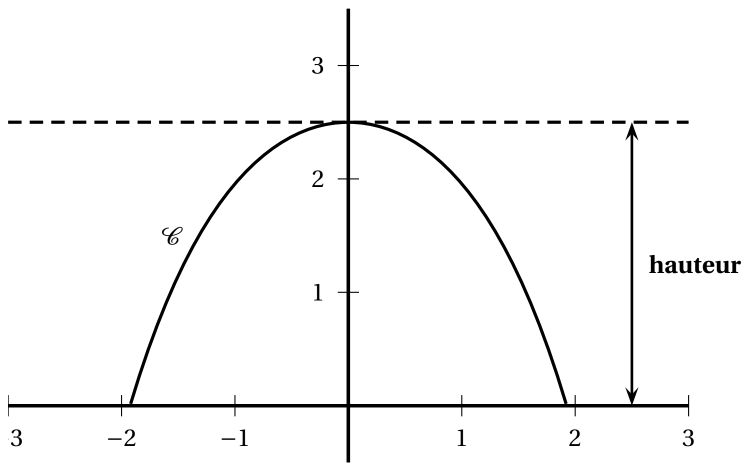
$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, une unique solution, que l'on note α.
2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

Partie B

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.
Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ +\alpha]$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ +\alpha]$.



On admettra que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. Calculer la hauteur d'un arceau.
2. **a.** Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par l'intégrale :

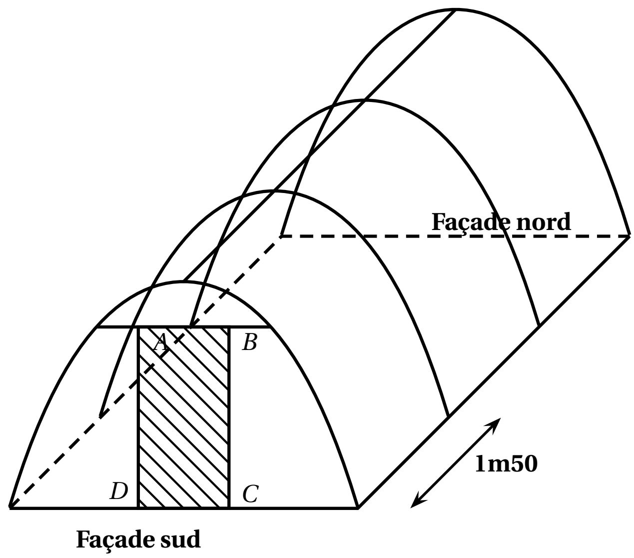
$$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

   Montrer que, pour tout réel x, on a : $1 + \left(f'(x)\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2$

b. En déduire la valeur de l'intégrale I en fonction de α.
Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à : $\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}$.

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.
On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle $ABCD$ de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2, de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.
Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Montrer que la quantité de bâche nécéssaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par :

$$\mathcal{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - 2$$

2. On prend 1,92 pour valeur approchée de α. Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

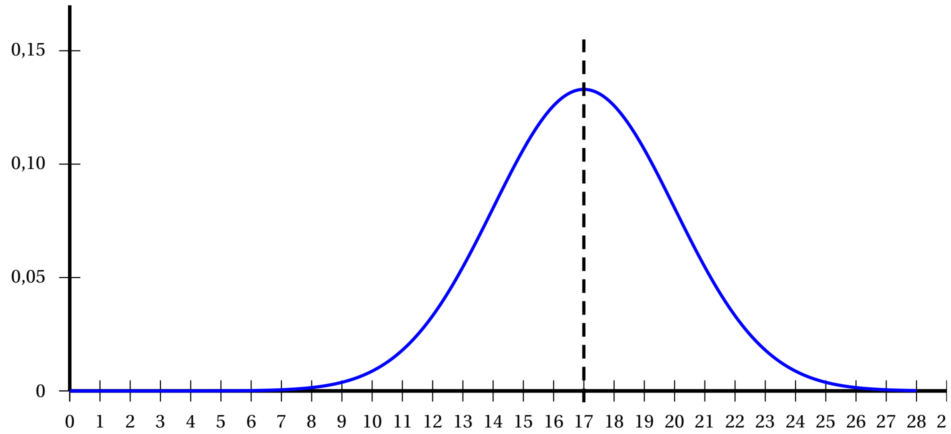
Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B, exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires X_A et X_B.
La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle [9 ; 25].
La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1. **a.** Calculer la durée moyenne d'une partie de type A.

   b. Préciser à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B.

2. On choisit au hasard, de manière équiprobable, un type de jeu. Quelle est la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes? On donner le résultat arrondi au centième.

Partie B

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

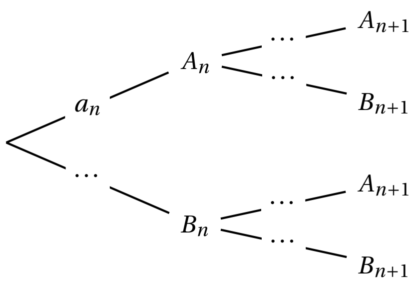
- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour une entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :
A_n : « la n-ième partie est une partie de type A. »
B_n : « la n-ième partie est une partie de type B. »
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre.

   b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$$



Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0{,}5$.

   a. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0{,}6$.

   b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

   c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0{,}6$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
   $a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?

d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E).
On note O le point d'affixe 0.
Affirmation 1 : Le triangle OAB est équilatéral.

2. On note u le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + \text{i}$ et on note $\overline{u}$ son conjugué.
Affirmation 2 : $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}$

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x\,\text{e}^{-nx+1}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction f_n admet un maximum.

4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)\,\text{e}^{-x}$.
Affirmation 4 : La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

5. Soit A un nombre réel strictement positif.
On considère l'algorithme ci-contre.
On suppose que la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.
Affirmation 5 : $15\ln(2) \leqslant \ln(A) \leqslant 16\ln(2)$

```
I ← 0
Tant que 2^I ⩽ A
    I ← I + 1
Fin Tant que
```

Exercice 4 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ et vérifient : $ad - bc = 1$.
On note I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.

2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S ; les expliciter.

3. **a.** Résoudre dans Z l'équation $(E) : 5x - 2y = 1$. On pourra remarquer que le couple $(1\ ;\ 2)$ est une solution particulière de cette équation.

   b. En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

Partie B

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$.

1. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

2. Soit B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

   a. Calculer le produit AB. On admet que $AB = BA$.

   b. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

   c. Montrer que A^{-1} appartient à l'ensemble S.

3. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\binom{x'}{y'} = A\binom{x}{y}$

   a. Montrer que $x = dx' - by'$ On admet de même que $y = ay' - cx'$

   b. On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Montrer que $D = D'$.

4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$

En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

Exercice 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée en annexe.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant pat I et parallèle au plan (FHK).

Partie A

Dans cette partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie.

1. Le plan (FHK) coupe la droite (AE) en un point qu'on note M. Construire le point M.
2. Construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On rappelle que $\mathscr{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FHK).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est : $4x + 4y - 3z - 1 = 0$.

   c. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.

   d. Calculer les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).
2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

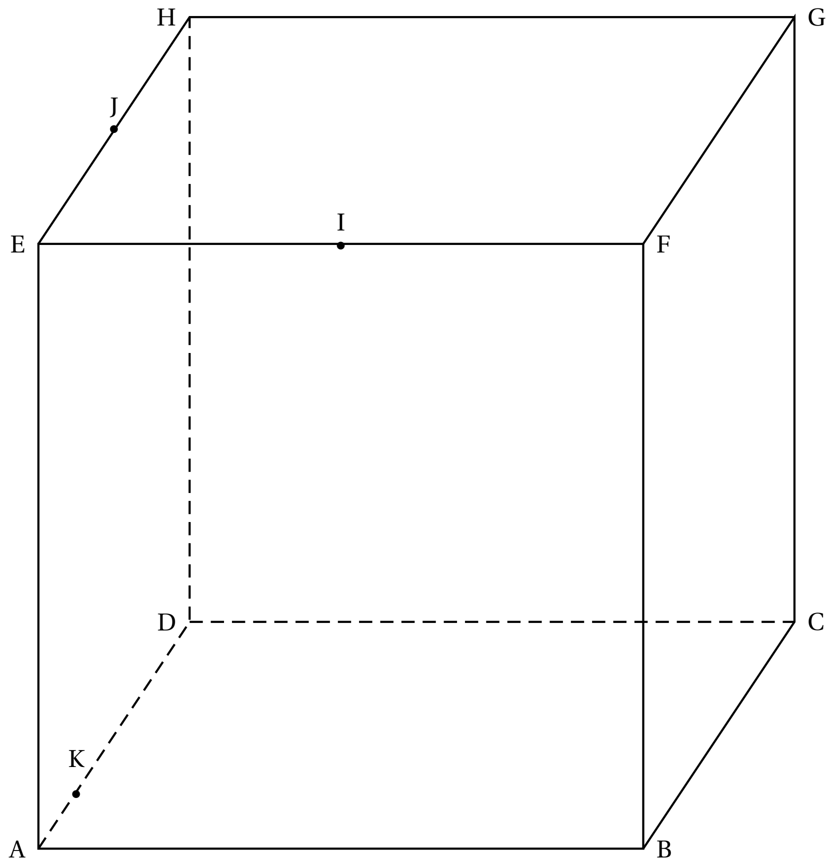
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

   c. Tracer les droite Δ sur la figure donnée en annexe.

   d. Les droites Δ et (BF) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier.

Annexe à rendre avec la copie



Sommaire Index

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie 4 septembre 2019 ∾

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0{,}9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = T_n - 0{,}1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?
2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - 0{,}1x^2$.
   Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = f(T_n)$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
   b. Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.
   c. La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
   d. Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $P(t) = \dfrac{1000}{0{,}4 + 3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0 ; +\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} *près.*

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...
Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

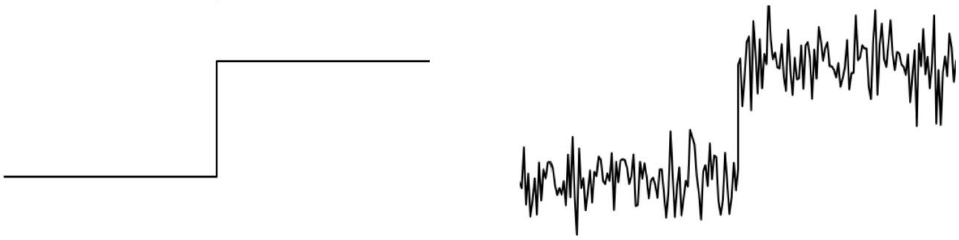
On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.
On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.

Partie B

Les erreurs de transmission des bits sont liées à la présence de bruits parasites sur le canal de communication comme l'illustre la figure ci-dessous :

Transmission idéale de 0 puis 1 **Transmission réelle, bruitée, de 0 puis 1**



On admet que l'information d'un bit reçu, incluant le bruit, peut être modélisée à l'aide d'une variable aléatoire continue qui suit une loi normale dont l'espérance est liée à la valeur du bit envoyé.
On envoie un bit de valeur 1. On admet que l'information reçue d'un bit de valeur 1 peut être modélisée par une variable aléatoire R qui suit la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type 0,3.
On considère que le bit reçu n'est pas correctement interprété lorsque la valeur de R est inférieure ou égale à 0,4.
Calculer la probabilité que le bit reçu ne soit pas correctement interprété.

Partie C

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.
Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;

- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les évènements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
- E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré de l'annexe 1 à rendre avec la copie.
2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. On considère le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   Affirmation 1 : Le nombre complexe z^2 est un réel positif.
   Affirmation 2 : L'argument du nombre complexe z^{2019} vaut 0 modulo 2π.

Dans ce qui suit, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$.

   Affirmation 3 : Cette équation admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

3. À tout point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \overline{z}(1 - z).$$

   Affirmation 4 : Il existe une infinité de points M confondus avec leur point image M'.

Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie**, on considère le cube ABCDEFGH de côté 6 cm dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, l'unité étant le cm.
On admet que le point I a pour coordonnées $(6\,;\,0\,;\,3)$ dans ce repère.
On appelle L le milieu du segment [FG].
On appelle P le plan défini par les trois points E, I et L.
On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan P.
2. Justifier que le volume du tétraèdre FELI est 9 cm^3.

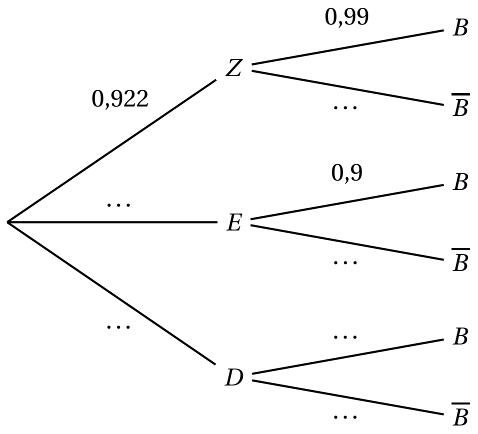
3. **a.** Soit Δ la perpendiculaire au plan P passant par le point F. Justifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t+6\\ y &=& -2t\\ z &=& 2t+6\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que l'intersection de la droite Δ et du plan P est le point $\text{K}\left(\frac{16}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{14}{3}\right)$.

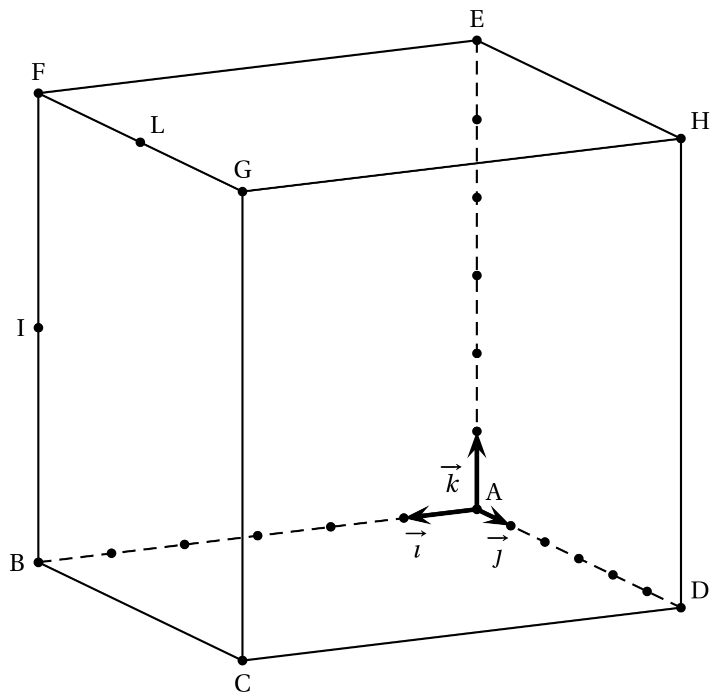
4. Calculer l'aire en cm^2 du triangle ELI.

5. Tracer sur le graphique fourni en **annexe 2 à rendre avec la copie**, la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle au plan P passant par le point G et en donner la nature précise sans justification.

Annexe 1 de l'exercice 2 à rendre avec la copie



Annexe 2 de l'exercice 4 : Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie



Sommaire Index

Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2019

EXERCICE 1 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment.

Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier :

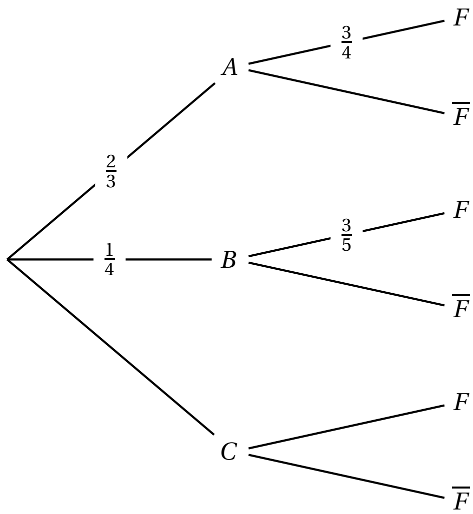
- un panier de petite taille ;
- un panier de taille moyenne ;
- un panier de grande taille.

Partie A

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- A : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- B : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- C : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.
   a. Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs frais.
   b. Calculer $P\left(B \cap \overline{F}\right)$, puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
   c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à 0,6. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?
2. Dans cette question, on suppose que $P(F) = 0{,}675$.
   a. Démontrer que la probabilité conditionnelle de F sachant C, notée $P_C(F)$, est égale à 0,3.
   b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais.
   Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ? Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Partie B

1. La masse, en gramme, d'un panier de grande taille peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi normale d'espérance 5 000 et d'écart- type 420. Un panier de grande taille est déclaré non conforme lorsque sa masse est inférieure à 4,5 kg.

   On choisit au hasard un panier de grande taille.

   Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit non conforme ?

2. Les responsables de l'association décident de modifier la méthode de remplissage. Avec cette nouvelle méthode, la masse, en gramme, d'un panier de grande taille est désormais modélisée par une variable aléatoire, notée Y, suivant une loi normale d'espérance 5 000 et d'écart-type σ. La probabilité qu'un panier de grande taille choisi au hasard soit non conforme est alors de 0,04.

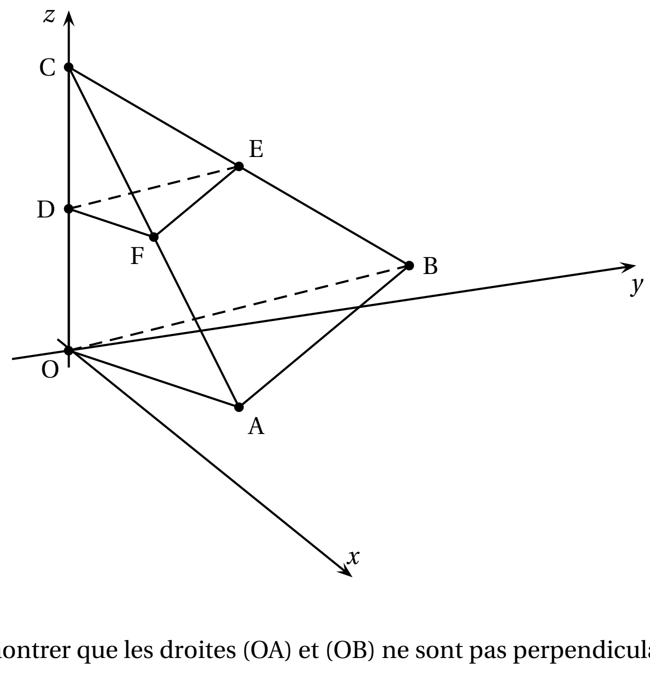
   Déterminer la valeur de σ arrondie à l'unité.

Partie C

Depuis plusieurs années, les associations distribuant des produits frais à leurs adhérents se développent dans tout le pays et connaissent un succès grandissant.
Lors d'une émission de radio consacrée à ce sujet, un journaliste annonce que 88 % des adhérents de ces associations sont satisfaits.
Un auditeur intervient dans l'émission pour contester le pourcentage avancé par le journaliste. à l'appui de son propos, l'auditeur déclare avoir réalisé un sondage auprès de 120 adhérents de ces associations et avoir constaté que, parmi eux, seuls 100 ont indiqué être satisfaits.
La contestation de l'auditeur est-elle fondée ?

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points A(10 ; 0 ; 1), B(1 ; 7 ; 1) et C(0 ; 0 ; 5).



1. **a.** Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

   b. Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$, arrondie au dixième.

2. Vérifier que $7x + 9y - 70z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA).
4. Soit D le milieu du segment [OC]. Déterminer une équation du plan P parallèle au plan (OAB) passant par D.

5. Le plan P coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F.
Déterminer les coordonnées du point F. On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{2}\,;\,3\right)$.

6. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

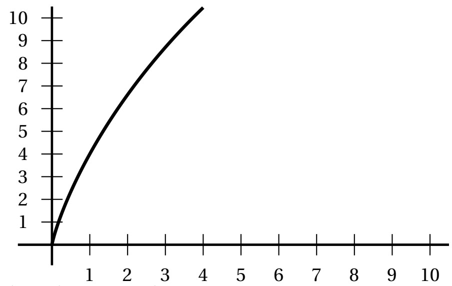
$$g(x) = 4x - x\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1. a. On rappelle que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

En déduire que

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0.$$

b. Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln x$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. On désigne par G la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$G(x) = \frac{1}{4}x^2(9 - 2\ln x).$$

On admet que la fonction G est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

a. Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« Il n'existe aucun réel α strictement supérieur à 1 tel que $\displaystyle\int_1^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. »

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite $\left(p_n\right)$ définie pour tout entier naturel n, par

$$p_n = n^2 - 42n + 4.$$

Affirmation 1 : La suite $\left(p_n\right)$ est strictement décroissante.

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
- $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n,

$$n^2 \leqslant (n+1)^2\, w_n \leqslant n^2 + n.$$

Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n}.$$

1. Calculer U_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$U_n = \frac{2^n}{1 + 2^n}.$$

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.
Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**

$u \leftarrow \dfrac{1}{2}$
$i \leftarrow 0$
Tant que $i < n$
    $u \leftarrow \dfrac{2u}{u+1}$
    $i \leftarrow i+1$
Fin Tant que
	$u \leftarrow \dfrac{1}{2}$
	Pour i allant de 0 à n
	    $u \leftarrow \dfrac{2u}{u+1}$
	Fin Pour
		$p \leftarrow 2^n$
		$u \leftarrow \dfrac{p}{p+1}$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une ville possède deux ports maritimes :

- un port de plaisance A ;
- un port de commerce B.

Le port de plaisance A n'a pas d'accès direct à l'océan mais est relié au port de commerce B qui, lui, est ouvert sur l'océan. Un passant, installé en terrasse sur le port de plaisance A, jette une bouteille dans l'eau.
À l'instant 0, la bouteille se trouve dans le port A.
Soit n un entier naturel.
On admet que :

- quand la bouteille est dans le port A au bout de n heures, la probabilité qu'elle y soit encore l'heure suivante est $\dfrac{3}{5}$;
- quand la bouteille est dans le port B au bout de n heures, la probabilité qu'elle soit dans le port A l'heure suivante est $\dfrac{1}{10}$ et la probabilité qu'elle se trouve toujours dans le port B l'heure suivante est $\dfrac{1}{15}$;
- le port A n'ayant pas d'accès direct à l'océan, lorsque la bouteille est dans le port A, elle ne peut pas se trouver dans l'océan l'heure suivante ;
- une fois dans l'océan, la bouteille ne revient jamais dans les ports.

Soient les évènements :

- A_n : « la bouteille se trouve dans le port A au bout de n heures » ;
- B_n : « la bouteille se trouve dans le port B au bout de n heures » ;
- C_n : « la bouteille se trouve dans l'océan au bout de n heures ».

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces évènements.
Ainsi on a $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. **a.** Compléter l'arbre fourni en **ANNEXE** à rendre avec la copie.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \dfrac{3}{5}a_n + \dfrac{1}{10}b_n \\ b_{n+1} & = & \dfrac{2}{5}a_n + \dfrac{1}{15}b_n \end{array}\right.$$

Soient les matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

c. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n, $U_n = M^n U_0$.

2. **a.** Donner U_0.

b. Calculer M^2 en détaillant les calculs de l'un des coefficients et en déduire qu'il existe un réel k tel que $M^2 = kM$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif,

$$M^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M.$$

d. En déduire que, pour tout entier n strictement positif,

$$U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Soit n un entier strictement positif.

a. Démontrer que la probabilité que la bouteille soit dans l'océan au bout de n heures est égale à $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

b. On considère l'algorithme ci-dessous :

$n \leftarrow 1$
Tant que $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} < 0{,}9$
$\quad n \leftarrow n+1$
Fin Tant que

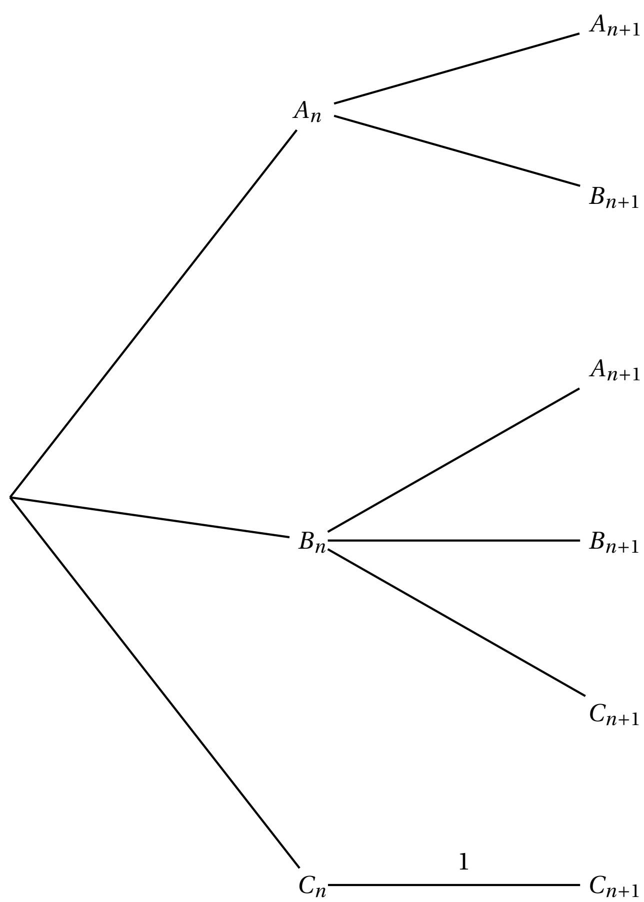
Indiquer sans justification le nombre contenu dans la variable n de cet algorithme à la fin de son exécution.

Interpréter ce nombre dans le contexte de l'exercice.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE de l'exercice 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



Sommaire Index

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole–La Réunion 13 septembre 2019 ∾

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Lors d'un examen professionnel, chaque candidat doit présenter un dossier de type A ou un dossier de type B ; 60 % des candidats présentent un dossier de type A, les autres présentant un dossier de type B.

Le jury attribue à chaque dossier une note comprise entre 0 et 20. Un candidat est reçu si la note attribuée à son dossier est supérieure ou égale à 10.

On choisit au hasard un dossier.

On admet qu'on peut modéliser la note attribuée à un dossier de type A par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 11,3 et d'écart-type 3, et la note attribuée à un dossier de type B par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance 12,4 et d'écart type 4,7.

On pourra noter A l'évènement : « le dossier est un dossier de type A », B l'évènement : « le dossier est un dossier de type B », et R l'évènement : « le dossier est celui d'un candidat reçu à l'examen ».

Les probabilités seront arrondies au centième.

1. Le dossier choisi est de type A. Quelle est la probabilité que ce dossier soit celui d'un candidat reçu à l'examen ? On admet que la probabilité que le dossier choisi, sachant qu'il est de type B, soit celui d'un candidat reçu est égale à 0,70.
2. Montrer que la probabilité, arrondie au centième, que le dossier choisi soit celui d'un candidat reçu à l'examen est égale à 0,68.
3. Le jury examine 500 dossiers choisis aléatoirement parmi les dossiers de type B. Parmi ces dossiers, 368 sont ceux de candidats reçus à l'examen.

   Un membre du jury affirme que cet échantillon n'est pas représentatif. Il justifie son affirmation en expliquant que dans cet échantillon, la proportion de candidats reçus est trop grande.

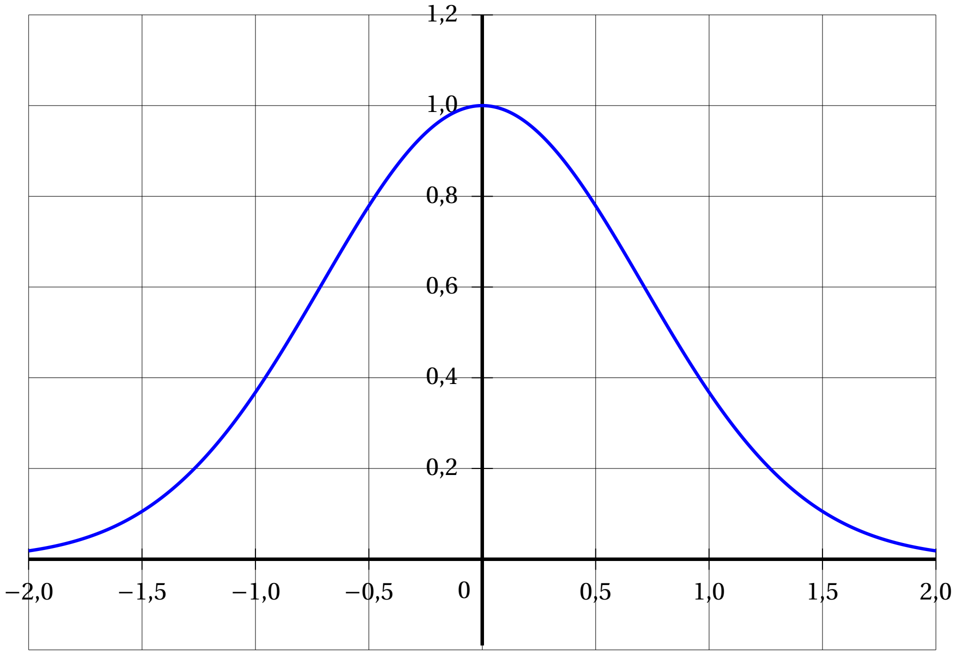
   Quel argument peut-on avancer pour confirmer ou contester ses propos ?
4. Le jury décerne un « prix du jury » aux dossiers ayant obtenu une note supérieure ou égale à N, où N est un nombre entier. La probabilité qu'un dossier choisi au hasard obtienne le « prix du jury » est comprise entre 0,10 et 0,15.

   Déterminer le nombre entier N.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthogonal d'une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$. La courbe $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et se situe dans le demi-plan $y > 0$.



Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Partie A

Les justifications des réponses aux questions suivantes pourront s'appuyer sur des considérations graphiques.

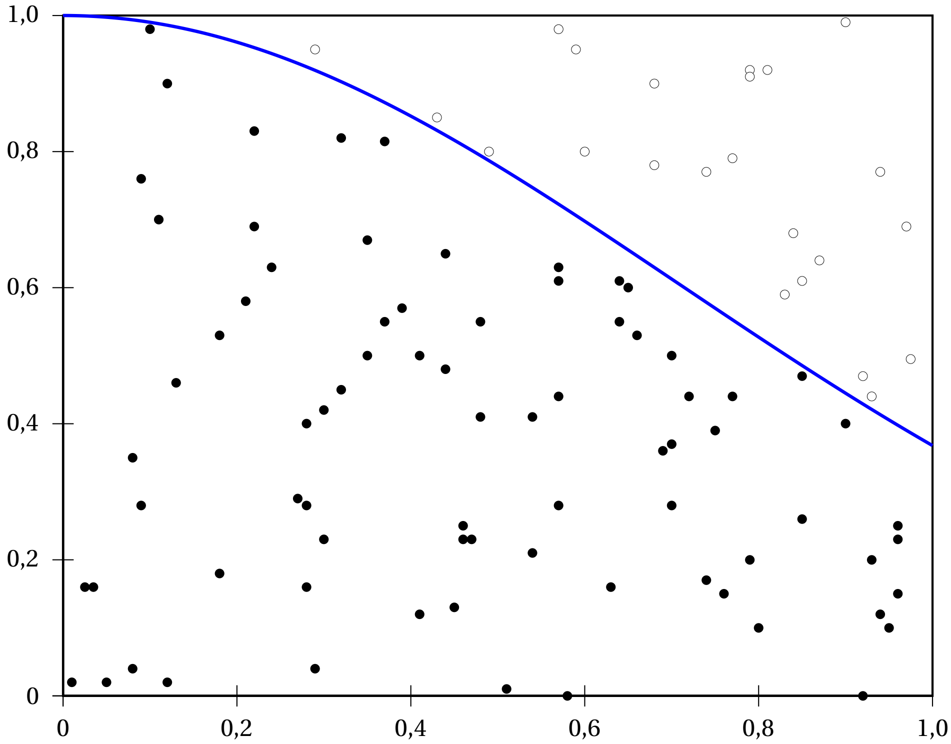
1. La fonction G est-elle croissante sur $[0~;~+\infty[$? Justifier.
2. Justifier graphiquement l'inégalité $G(1) \leqslant 0{,}9$.
3. La fonction G est-elle positive sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Dans la suite du problème, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$.

Partie B

1. Étude de g
   a. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Calculer la fonction dérivée de g et en déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   c. Préciser le maximum de g sur $\mathbb{R}$. En déduire que $g(1) \leqslant 1$.
2. On note E l'ensemble des points M situés entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On appelle I l'aire de cet ensemble.
   On rappelle que :
   $$I = G(1) = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u.$$
   On souhaite estimer l'aire I par la méthode dite « de Monte-Carlo » décrite ci-dessous.
   - On choisit un point $M(x~;~y)$ en tirant au hasard de façon indépendante ses coordonnées x et y selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0~;~1]$. On admet que la probabilité que le point M appartienne à l'ensemble E est égale à I.
   - On répète n fois l'expérience du choix d'un point M au hasard. On compte le nombre c de points appartenant à l'ensemble E parmi les n points obtenus.
   - La fréquence $f = \dfrac{c}{n}$ est une estimation de la valeur de I.

a. La figure ci-dessous illustre la méthode présentée pour $n = 100$. Déterminer la valeur de f correspondant à ce graphique.



b. L'exécution de l'algorithme ci-dessous utilise la méthode de Monte-Carlo décrite précédemment pour déterminer une valeur du nombre f.
Recopier et compléter cet algorithme.

f, x et y sont des nombres réels, n, c et i sont des entiers naturels.
ALEA est une fonction qui génère aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.

```
c ← 0
Pour i variant de 1 à n faire :
            x ← ALEA
            y ← ALEA
      Si y ⩽ … alors
            c ← …
      fin Si
fin Pour
                f ← …
```

c. Une exécution de l'algorithme pour $n = 1\,000$ donne $f = 0{,}757$.
En déduire un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de I.

Partie C

On rappelle que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$ et que la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u.$$

On se propose de déterminer une majoration de $G(t)$ pour $t \geqslant 1$.

1. *Un résultat préliminaire.*

On admet que, pour tout réel $u \geqslant 1$, on a $g(u) \leqslant \dfrac{1}{u^2}$.

En déduire que, pour tout réel $t \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 1 - \frac{1}{t}.$$

2. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 1$,

$$G(t) \leqslant 2 - \frac{1}{t}.$$

Que peut-on dire de la limite éventuelle de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. Soit m un nombre réel et soit l'équation (E) : $\quad 2z^2 + (m-5)z + m = 0$.

a. Affirmation 1 :

« Pour $m = 4$, l'équation (E) admet deux solutions réelles. »

b. Affirmation 2 :

« Il n'existe qu'une seule valeur de m telle que (E) admette deux solutions complexes qui soient des imaginaires purs. »

2. Dans le plan complexe, on considère l'ensemble S des points M d'affixe z vérifiant :

$$|z-6| = |z+5\mathrm{i}|.$$

Affirmation 3 :

« L'ensemble S est un cercle. »

3. On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. On note d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$d : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+t \\ y & = & 2-t \\ z & = & 3+t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

On note d' la droite passant par le point $\mathrm{B}(4\,;\,4\,;-6)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\,(5\,;\,2\,;\,-9)$.

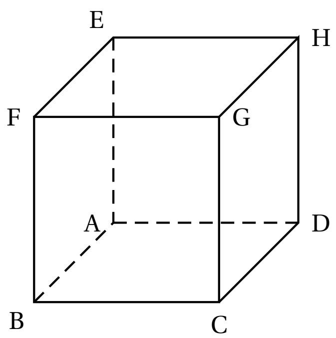
Affirmation 4 :

« Les droites d et d' sont coplanaires. »

4. On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

Affirmation 5 :

« Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ est un vecteur normal au plan (ABG). »



Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0{,}1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f\left(v_n\right).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.
   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)\left(1 - v_n\right).$$

   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un laboratoire étudie l'évolution d'une population d'insectes parasites de plantes.
Cette évolution comporte deux stades : un stade larvaire et un stade adulte qui est le seul au cours duquel les insectes peuvent se reproduire.
L'observation de l'évolution de cette population conduit à proposer le modèle suivant.
Chaque semaine :

- Chaque adulte donne naissance à 2 larves puis 75 % des adultes meurent.
- 25 % des larves meurent et 50 % des larves deviennent adultes.

Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n le nombre de larves et a_n le nombre d'adultes au bout de n semaines.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix}\ell_n\\ a_n\end{pmatrix}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice : (0,25 2)

$$A = \begin{pmatrix}0,25 & 2\\ 0,5 & 0,25\end{pmatrix}.$$

2. On note U et V les matrices colonnes : $U = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$, où a est un nombre réel.

a. Montrer que $AU = 1,25U$.

b. Déterminer le réel a tel que $AV = -0,75V$.

Dans les questions 3 et 4, le réel a est fixé de sorte qu'il est la solution de $AV = -0,75V$.

3. On admet qu'il existe deux nombres réels α et β tels que : $X_0 = \alpha U + \beta V$ et $\alpha > 0$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \alpha(1,25)^n U + \beta(-0,75)^n V$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n : $\left\{\begin{array}{lcl}\ell_n & = & 2(1,25)^n\left(\alpha - \beta(-0,6)^n\right)\\ a_n & = & (1,25)^n\left(\alpha + \beta(-0,6)^n\right).\end{array}\right.$

4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ell_n}{a_n} = 2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

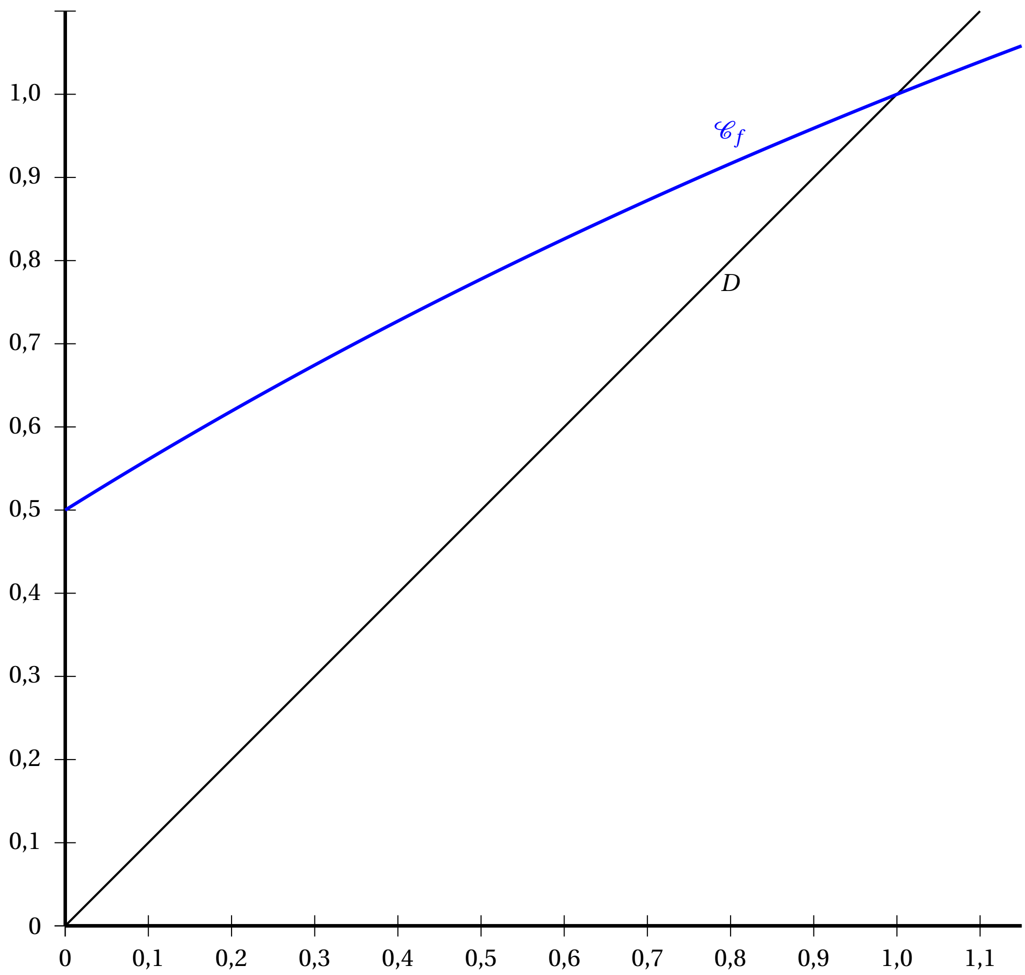
Partie B

1. On considère l'équation (E) : $19x - 6y = 1$. Déterminer le nombre de couples d'entiers $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation (E) et vérifiant $2000 \leqslant x \leqslant 2100$.

2. Soit n un entier naturel. Montrer que les entiers $(2n+3)$ et $(n+3)$ sont premiers entre eux si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.

Annexe

À rendre avec la copie



Sommaire Index

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud 8 novembre 2019

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Le roller de vitesse est un sport qui consiste à parcourir une certaine distance le plus rapidement possible en rollers. Dans le but de faire des économies, un club de roller de vitesse s'intéresse à la gestion de ses chronomètres et des roulements de ses rollers.

Partie A :

On note T la variable aléatoire égale à la durée de vie, en mois, d'un chronomètre et on admet qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0555$.

1. Calculer la durée de vie moyenne d'un chronomètre (arrondie à l'unité).
2. Calculer la probabilité qu'un chronomètre ait une durée de vie comprise entre un et deux ans.
3. Un entraîneur n'a pas changé son chronomètre depuis deux ans. Quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de fonctionner au moins un an de plus ?

Partie B :

Ce club fait des commandes groupées de roulements pour ses adhérents auprès de deux fournisseurs A et B.

- Le fournisseur A propose des tarifs plus élevés mais les roulements qu'il vend sont sans défaut avec une probabilité de 0,97.
- Le fournisseur B propose des tarifs plus avantageux mais ses roulements sont défectueux avec une probabilité de 0,05.

On choisit au hasard un roulement dans le stock du club et on considère les évènements :
A : « le roulement provient du fournisseur A »,
B : « le roulement provient du fournisseur B »,
D : « le roulement est défectueux ».

1. Le club achète 40 % de ses roulements chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B.
   a. Calculer la probabilité que le roulement provienne du fournisseur A et soit défectueux.
   b. Le roulement est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur B.
2. Si le club souhaite que moins de 3,5 % des roulements soient défectueux, quelle proportion minimale de roulements doit-il commander au fournisseur A ?

Partie C :

Le diamètre intérieur standard d'un roulement sur une roue de roller est de 8 mm.
On note X la variable aléatoire donnant en mm le diamètre d'un roulement et on admet que X suit une loi normale d'espérance 8 et d'écart type 0,1.
Un roulement est dit conforme si son diamètre est compris entre 7,8 mm et 8,2 mm.

1. Calculer la probabilité qu'un roulement soit conforme.
2. Le fournisseur B vend ses roulements par lots de 16 et affirme que seulement 5 % de ses roulements sont non conformes.

   Le président du club, qui lui a acheté 30 lots, constate que 38 roulements sont non conformes. Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur B ?

   On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

3. Le fabricant de roulements de ce fournisseur décide d'améliorer la production de ses roulements. Le réglage de la machine qui les fabrique est modifié de sorte que 96 % des roulements soient conformes. On suppose qu'après réglage la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 8 et d'écart-type σ.

a. Quelle est la loi suivie par $\dfrac{X-8}{\sigma}$?

b. Déterminer σ pour que le roulement fabriqué soit conforme avec une probabilité égale à 0,96.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5 μg/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. a. Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$

3. a. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).

b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. a. Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0 ; 4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 *appartenant à* $[4~;~+\infty[$ *vérifiant* $f(t_1) = 2,5$.
On donne une valeur approchée de t_1 *à* 10^{-3} *près :* $t_1 \approx 18,930$.

b. Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

5. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(t) = -12(t+4)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2t$.

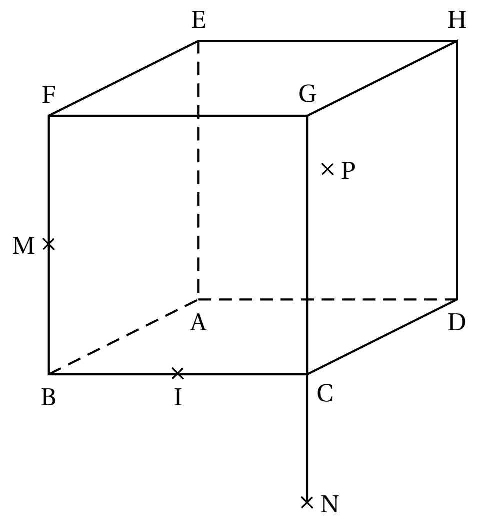
a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f et en déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'unité près.

b. En déduire une valeur approchée à 0,1 près du taux moyen de vasopressine, lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à 2,5 μg/mL.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH.
Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC], le point N est défini par la relation
$\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ et le point P est le centre de la face ADHE.



Partie A :

1. Justifier que la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I.
2. Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan (MNP).

Partie B :

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

   En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par G et orthogonale au plan (MNP).
3. Montrer que la droite (d) coupe le plan (MNP) au point K de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

   En déduire la distance GK.
4. On admet que les quatre points M, E, D et I sont coplanaires et que l'aire du quadrilatère MEDI est $\dfrac{9}{8}$ unités d'aire.

   Calculer le volume de la pyramide GMEDI.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} &= 3 - \dfrac{10}{u_n+4} \\ u_0 &= 5 \end{cases}$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. **a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ⩾ 1,01
   n ← n + 1
   u ← 3 − 10/(u + 4)
Fin du Tant que
```

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A :

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.

1. Démontrer que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a - b, b)$.
2. En utilisant l'égalité précédente, calculer $\text{PGCD}\left(4^3 - 1, 4^2 - 1\right)$.
3. Compléter l'algorithme fourni en annexe de telle sorte qu'après exécution, la variable A contienne $\text{PGCD}\left(4^3 - 1, 4^2 - 1\right)$.

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

On admettra que pour tout entier naturel n non nul, u_n est un entier naturel non nul.

On note $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 dont on précisera les coefficients.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Justifier que P est inversible et donner P^{-1}.

   b. Vérifier que $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Soit un entier naturel n non nul. Calculer les coefficients de la matrice A^n.

5. On admettra que pour tout entier naturel n non nul, $V_n = A^nV_0$.
   Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times 4^n$.

6. **a.** Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

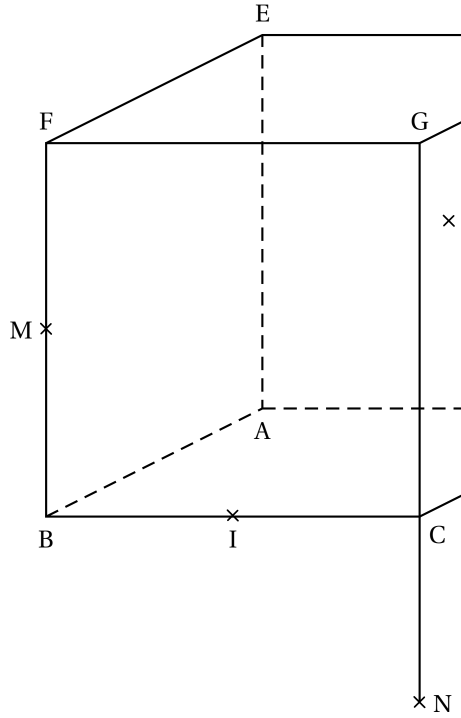
   b. En déduire $\text{PGCD}(u_{n+1}, u_n)$ pour tout entier naturel n.

   c. Déterminer pour tout entier naturel n, $\text{PGCD}\left(4^{n+1} - 1, 4^n - 1\right)$.

ANNEXE

À compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3



EXERCICE 4

$A \leftarrow 4^3 - 1$
$B \leftarrow 4^2 - 1$
Tant que ...... :
    Si $A > B$, alors :
        $A \leftarrow \ldots$
    Sinon :
        $B \leftarrow \ldots$
    Fin Si
Fin Tant que

Sommaire Index

Baccalauréat S – Nouvelle Calédonie
26 novembre 2019

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise est spécialisée dans la vente de carrelage.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

On suppose dans cette partie que l'entreprise vend des lots de carrelage contenant 25 % de carreaux avec motif et 75 % de carreaux blancs.
Lors d'un contrôle qualité on observe que :

- 2,25 % des carreaux sont fissurés ;
- 6 % des carreaux avec motif sont fissurés.

On prélève au hasard un carreau.
On note M l'évènement « le carreau a un motif » et F l'évènement « le carreau est fissuré ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. On sait que le carreau prélevé est fissuré.
Démontrer que la probabilité qu'il s'agisse d'un carreau avec motif est $\dfrac{2}{3}$

3. Calculer $P_{\overline{M}}(F)$, probabilité de F sachant $\overline{M}$.

Partie B

On modélise l'épaisseur en millimètre d'un carreau pris au hasard par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart type σ.
Un carreau est commercialisable si son épaisseur mesure entre 10,1 mm et 11,9 mm.
On sait que 99 % des carreaux sont commercialisables.

1. Démontrer que $P(X < 10{,}1) = 0{,}005$.

2. On introduit la variable aléatoire Z telle que

$$Z = \frac{X - 11}{\sigma}.$$

a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z.

b. Démontrer que $P\left(Z \leqslant -\frac{0{,}9}{\sigma}\right) = 0{,}005$.

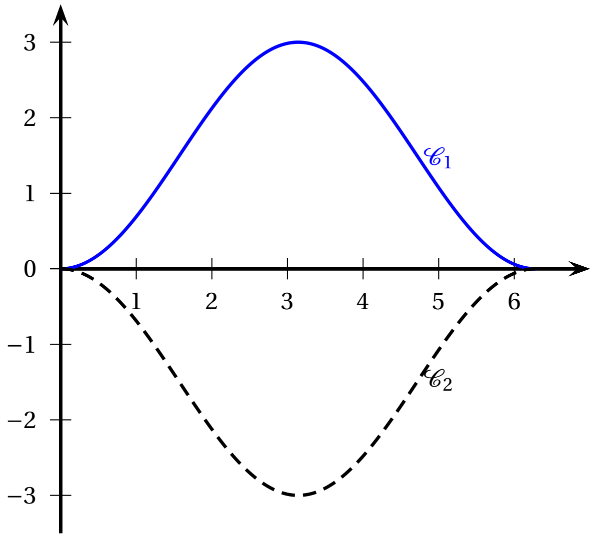
c. En déduire la valeur de σ arrondie au centième.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $[0~;~2\pi]$ par

$$f(x) = -1{,}5\cos(x) + 1{,}5$$

On admet que la fonction f est continue sur $[0~;~2\pi]$.
On note $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



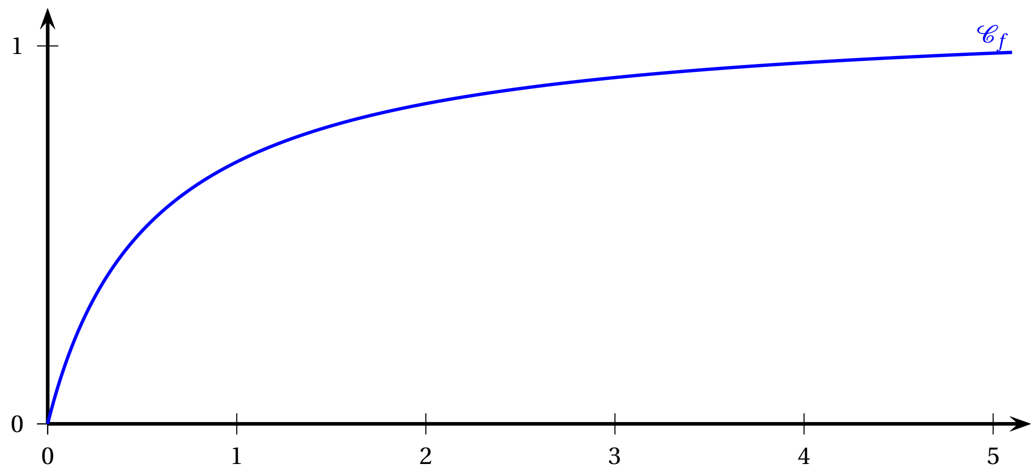
1. Démontrer que la fonction f est positive sur $[0~;~2\pi]$.
2. Sur la figure ci-dessus, la courbe tracée en tiretés, notée $\mathcal{C}_2$, est la courbe symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.
   La forme d'un carreau est celle de la zone délimitée par les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   On note $\mathcal{A}$ son aire, exprimée en unité d'aire.
   Calculer $\mathcal{A}$.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

   b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ où $x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}215$ et $g(x_0) \approx 0{,}088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de la fonction g	0 ↗	$g(x_0)$	↘ $-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.
2.
   a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

   b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

```
x ← 0,22
Tant que ......... faire
        x ← x + 0,01
Fin de Tant que
```

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du carré ADHE, c'est-à-dire, le milieu du segment [AH] et du segment [ED]. Soit J un point du segment [CG].
La section du cube ABCDEFGH par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ.

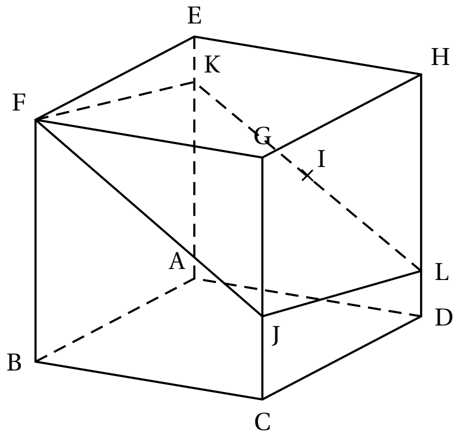


Figure 1

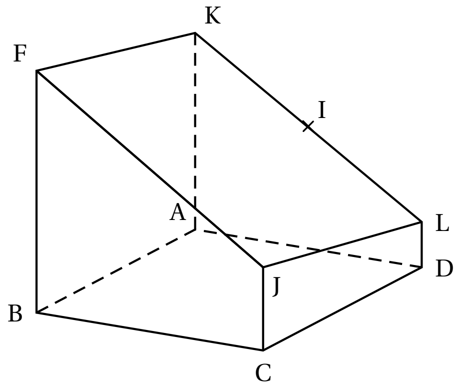


Figure 2

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On a donc A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0) et E(0 ; 0 ; 1).

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1\,;\ 1\,;\ \dfrac{2}{5}\right)$

1. Démontrer que les coordonnées du point I sont $\left(0\,;\ \dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

- **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).
- **b.** Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est

$$-x+3y+5z-4=0.$$

2. Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B.

- **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
- **b.** On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ).
  Démontrer que M $\left(\dfrac{6}{7}\,;\ \dfrac{3}{7}\,;\ \dfrac{5}{7}\right)$.

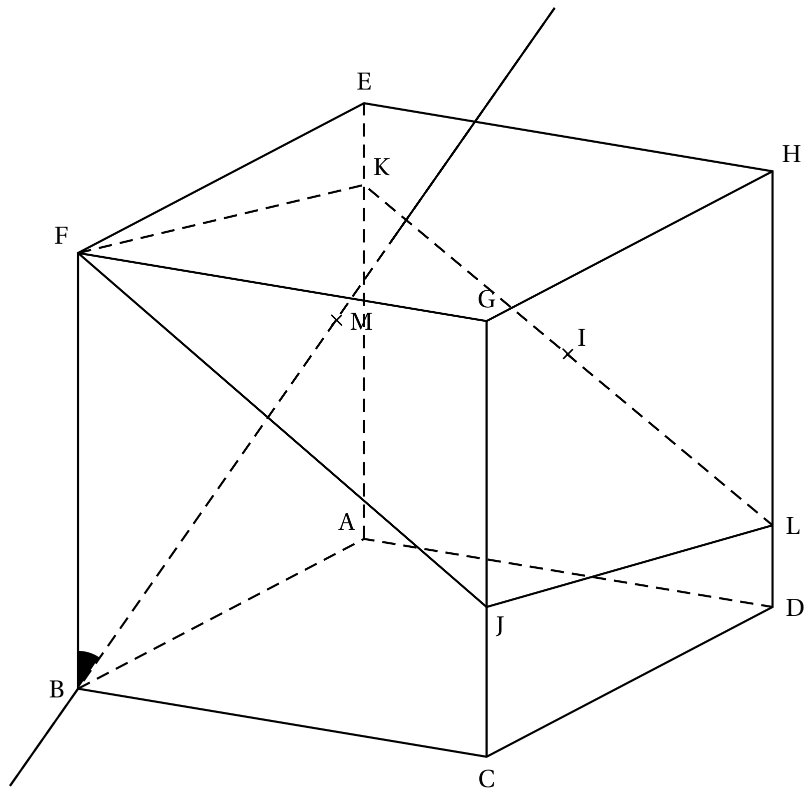


Figure 1

3. **a.** Calculer $\overrightarrow{\mathrm{BM}}.\overrightarrow{\mathrm{BF}}$.
   b. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{MBF}}$.

Partie B

Dans cette partie, J est un point quelconque du segment [CG].
Ses coordonnées sont donc $(1\,;\,1\,;\,a)$, où a est un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.
2. On admet alors que L a pour coordonnées $\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{a}{2}\right)$.
   Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère FKLJ est-il un losange ?

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère l'équation (E) :

$$25z^2 - 14z + 25 = 0.$$

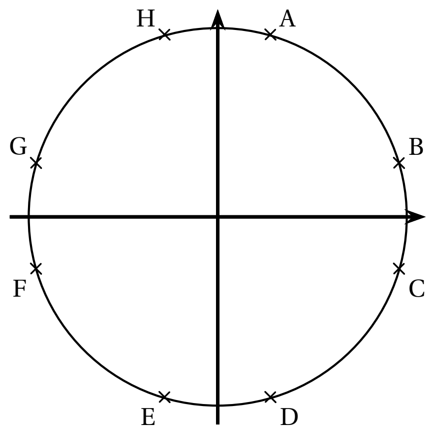
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On écrira les solutions sous forme algébrique.

2. Démontrer que les solutions de (E) sont de module 1.
3. On note α le réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\cos\alpha = \frac{7}{25} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{24}{25}.$$

Écrire les solutions de (E) sous forme exponentielle en fonction de α.

4. La figure ci-contre fait apparaître huit points du cercle unité. Deux de ces huit points ont une affixe solution de l'équation (E). Lesquels ?



Partie B

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation A** :

$$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} = 1.$$

2. Soit z le nombre complexe $\dfrac{1}{6}(2+5\mathrm{i})$.

Affirmation B :

$$\lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0.$$

3. On rappelle que, pour tout nombre réel x,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Affirmation C :

Pour tout nombre réel a de $[-\pi\,;\,0]$ tel que $\cos(2a) = \dfrac{7}{25}$, on a $\sin(a) = -\dfrac{3}{5}$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1}+1}{5}.$$

1. Calculer a_2 et a_3.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 16a_n - 3$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, a_n est un nombre entier naturel.
4. Dans cette question on utilise l'égalité de la question **2.** afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).
   a. Pour tout entier naturel n, on note d_n le plus grand diviseur commun de a_n et a_{n+1}.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, d_n est égal à 1 ou à 3.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} \equiv a_n$ [3].
   c. Vérifier que $a_0 \equiv 1$ [3].
   En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre a_n n'est pas divisible par 3.

d. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

5. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le nombre a_n n'est pas premier.

On pose, pour tout entier naturel n,

$$b_n = 2^{n+1}\left(2^n - 1\right) + 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2^{n+1}\left(2^n + 1\right) + 1.$$

On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$5a_n = b_n c_n.$$

a. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$5 \text{ divise } b_n \quad \text{ou} \quad 5 \text{ divise } c_n.$$

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que $b_n > 5$ et $c_n > 5$.

c. En déduire que a_n n'est pas un nombre premier.

Baccalauréat S (obligatoire) – Nouvelle Calédonie février 2020

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **6 points**

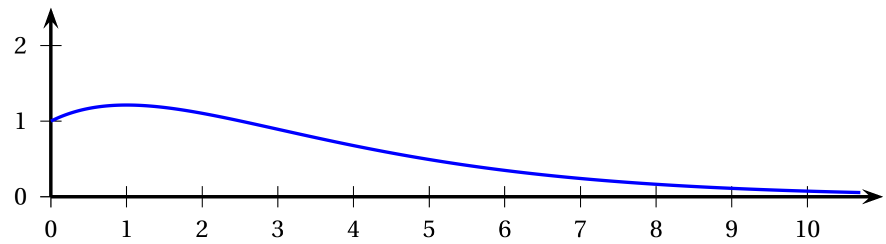
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},$$

où a et b désignent deux nombres réels. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous.



Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$.
2. Démontrer que, pour tout réel positif x, $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}b + a\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

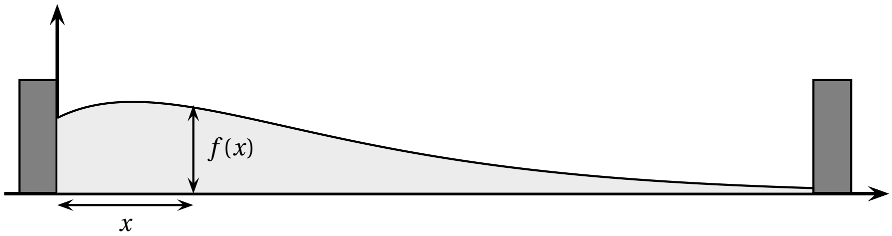
$$f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

1. **a.** Justifier que, pour tout réel x positif, $f(x) = 2\left(\dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

   b. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$,
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}07$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
4. Donner l'arrondi de α à l'unité.

Partie C - Modélisation d'un tas de sable

Dans cette partie, on considère que la courbe de la fonction f modélise le profil d'un tas de sable.
La longueur x et la hauteur $f(x)$ sont exprimées en mètres.
Ainsi, le fait que $f(0) = 1$ signifie qu'à son extrémité gauche, la hauteur du tas de sable est de 1 mètre.
On souhaite que le tas de sable soit limité par deux murs comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Le mur de gauche coïncide avec l'axe des ordonnées et le mur de droite est placé de telle sorte que la hauteur de sable à cet endroit est de 7 cm.



1. Pourquoi le mur de droite doit-il être placé à environ 10 mètres du mur de gauche ?
2. Vérifier que la fonction G définie sur $[0\,;\,10]$ par $G(x) = (-2x-4)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de la fonction g définie sur $[0\,;\,10]$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
3. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
4. Pour pouvoir créer un terrain de sport sur sable, on décide de niveler le tas de sable, c'est-à-dire de l'étaler à une même hauteur entre les deux murs.

   Quelle sera la hauteur du tas de sable une fois le nivellement réalisé ? Expliquer le raisonnement et arrondir le résultat au centimètre.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les probabilités seront arrondies si nécessaire au millième.

Partie A

Une antenne relais chargée d'acheminer des communications est exploitée par trois opérateurs : l'opérateur A, l'opérateur B et l'opérateur C.
Par ailleurs, cette antenne utilise deux types de canal : le canal vocal (pour les communications téléphoniques) et le canal internet (pour les communications par texto ou par mail).
On dispose des données suivantes :

- 40 % des communications passent par l'opérateur A ;
  25 % des communications passent par l'opérateur B ;
- 10 % des communications passant par l'opérateur A utilisent le canal vocal ;
- 20 % des communications passant par l'opérateur B utilisent le canal vocal ;
- 20 % de l'ensemble des communications utilisent le canal vocal.

On choisit une communication au hasard et on considère les évènements :

- A : « la communication passe par l'opérateur A » ;
  B : « la communication passe par l'opérateur B » ;
- C : « la communication passe par l'opérateur C » ;
- V : « la communication utilise le canal vocal ».

1. À l'aide des valeurs de l'énoncé, compléter les pointillés indiqués sur les branches de l'arbre pondéré donné en **ANNEXE** à rendre avec la copie.
2. Calculer la probabilité que la communication passe par l'opérateur A et utilise le canal vocal.

3. La communication passe par l'opérateur C. Quelle est la probabilité qu'elle soit acheminée par le canal vocal ?

Partie B

Cette antenne relais couvre une zone géographique bien définie appelée cellule. Dans cette cellule, les ressources radio sont limitées à 350 appels simultanés. Cela signifie qu'au-delà de 350 appels, l'antenne relais est saturée.
Dans cette cellule, 1 600 personnes possèdent chacune un téléphone mobile.
À un instant donné, on choisit au hasard une personne parmi les 1 600 personnes de la cellule. On admet que la probabilité que cette personne passe un appel téléphonique est égale à 0,2. On admet en outre que les 1 600 personnes de la cellule agissent indépendamment les unes des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes passant un appel à un instant donné dans cette cellule.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? On précisera ses paramètres.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que l'antenne ne soit pas saturée.

Partie C

On considère une autre cellule dans laquelle le nombre de personnes passant un appel téléphonique au même moment est modélisé par une variable aléatoire Y suivant une loi normale d'espérance $\mu = 335$ et d'écart-type σ inconnu,

1. On a constaté que, dans cette cellule, la probabilité que l'antenne soit saturée est 0,001 5.
   On rappelle que l'antenne est saturée lorsque le nombre de personnes passant un appel téléphonique au même moment est supérieur à 350.
   a. Sur l'**ANNEXE** à rendre avec la copie, on a réalisé un croquis donnant l'allure de la courbe de la fonction densité de la variable aléatoire Y.
      Hachurer sur cette annexe le domaine correspondant à la probabilité que l'antenne soit saturée.
   b. Justifier que la valeur de σ, arrondie à l'unité, vaut 5.
2. L'antenne dispose d'un mode « économie d'énergie » qui s'active lorsque moins de 330 personnes passent un appel téléphonique au même moment.
   Calculer la probabilité que l'antenne soit en mode « économie d'énergie ».

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les PARTIES A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A

On considère l'équation suivante :

$$(E) : \quad z^3 + 2\left(\sqrt{2} - 1\right) z^2 + 4\left(1 - \sqrt{2}\right) z - 8 = 0,$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$(z-2)\left(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4\right) = z^3 + 2\left(\sqrt{2} - 1\right) z^2 + 4\left(1 - \sqrt{2}\right) z - 8.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) en donnant ses solutions sous forme algébrique.
3. Écrire toutes les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

PARTIE B

Dans cette partie, on cherche à déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

On considère les points A et B du plan complexe d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2$ et $z_{\text{B}} = 2\,\text{e}^{\,\text{i}\frac{3\pi}{4}}$ et I le milieu du segment [AB] d'affixe z_{I}.

1. Démontrer que le triangle OAB est un triangle isocèle.
2. Démontrer qu'une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\text{OI}}\right)$ est $\dfrac{3\pi}{8}$.
3. Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_{I} puis le module de z_{I}.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 6 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1.$$

   Affirmation 1 : Pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 4$.

2. Soit (t_n) une suite géométrique de premier terme $t_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{4}$.
   On appelle S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (t_n) , soit $S_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n$.
   Affirmation 2 : La suite (S_n) a pour limite $+\infty$.

3. On définit la suite (c_n), pour tout entier naturel n non nul, par

$$c_n = 1 + \frac{\cos(n)}{n}.$$

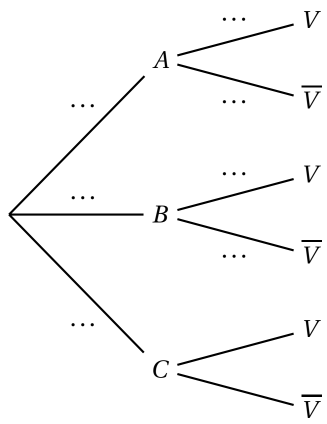
   Affirmation 3 : La suite (c_n) est convergente.

4. Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points A(1 ; 2 ; 0) , B(3 ; 0 ; 6) , C(6 ; −1 ; 9) et D(−4 ; 4 ; −6).
   Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

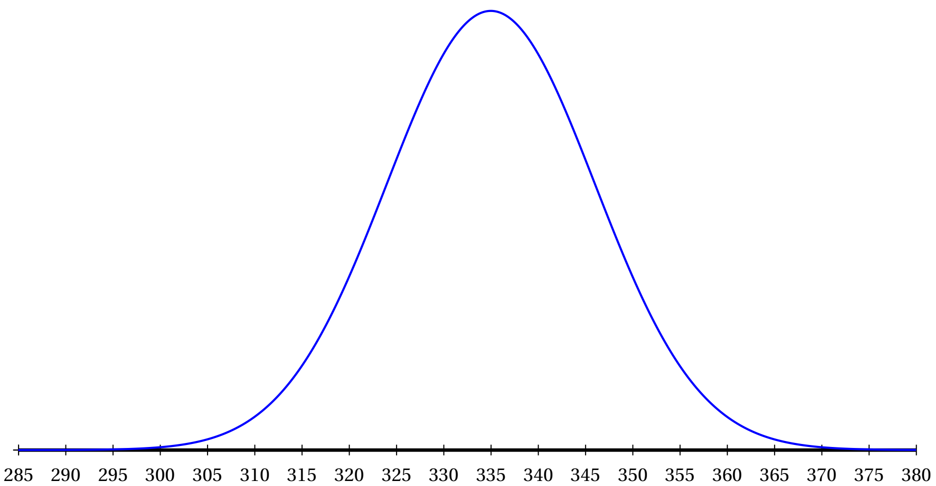
5. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A(1 ; 2 ; 0) et de vecteur normal $\vec{n}\,(6\,;\,4\,;\,-1)$.
   Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+1\\ y &=& -t-1\\ z &=& 2t+3\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
   Affirmation 5 : Le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ ne possèdent aucun point commun.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2 : PARTIE A



Exercice 2 : PARTIE C



Sommaire Index

Index