

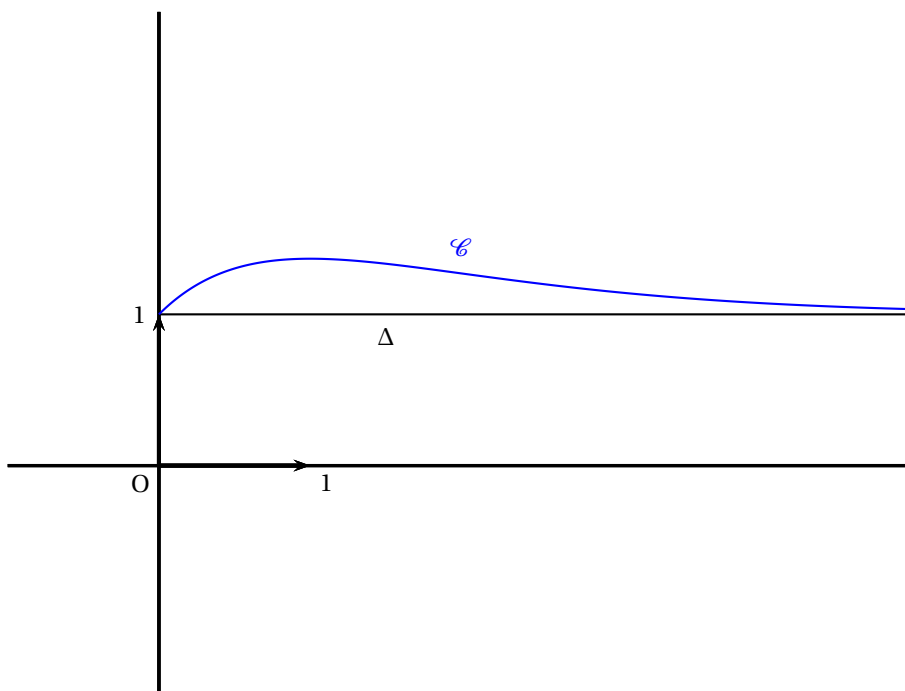
3. Montrer que l'équation $z = \frac{i(z+i)}{z-1+i}$ admet deux solutions que l'on précisera.
On note E et F les points qui ont pour affixes respectives ces solutions.
Justifier que les points E et F appartiennent au cercle \mathcal{C} et les placer sur la figure.
4. Soit M un point distinct du point B et M' son image.
- Exprimer la distance OM' en fonction des distances AM et BM .
 - Montrer que si le point M décrit la droite Δ , alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que si le point M décrit la droite (AB) privée du point B, alors le point M' appartient à une droite que l'on précisera.

EXERCICE 3**6 points****Commun à tous les candidats**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + xe^{-x}.$$

Sa courbe représentative \mathcal{C} dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et la droite Δ d'équation $y = 1$ sont tracées ci-dessous.

**Partie A**

- Justifier les propriétés suivantes constatées sur la représentation graphique.
 - La droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.
 - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
- Soit t un nombre réel positif. On considère l'intégrale $\int_0^t f(x) dx$.
 - Interpréter graphiquement cette intégrale.

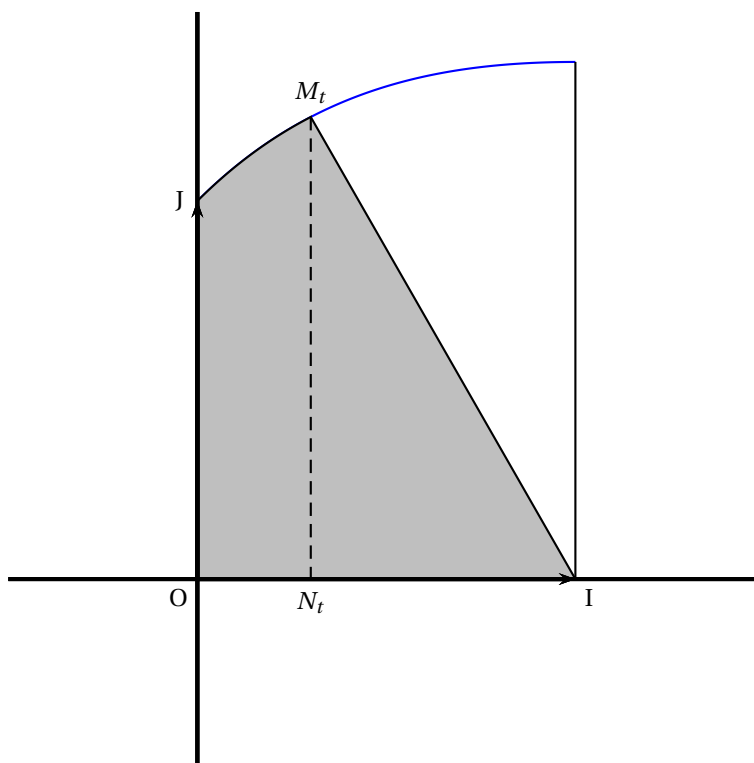
b. Montrer que $\int_0^t f(x) dx = t - te^{-1} - e^{-t} + 1$.

Partie B

On note I le point de coordonnées (1 ; 0) et J le point de coordonnées (0 ; 1).

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; 1]$, M_t désigne le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse t et N_t le point de coordonnées $(t; 0)$.

On appelle \mathcal{D}_t , le domaine du plan délimité par la droite (IM_t) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe \mathcal{C} . Ce domaine est représenté par la zone grisée du graphique ci-joint. Soit $\mathcal{A}(t)$ la mesure de son aire exprimée en unité d'aire.



1. Interpréter graphiquement $\mathcal{A}(0)$ et donner sa valeur exacte.
2. Interpréter graphiquement $\mathcal{A}(1)$ et donner sa valeur exacte.
3. Calculer l'aire du triangle $M_t N_t I$.
4. En déduire que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$\mathcal{A}(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1 \right) e^{-t}.$$

5. Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il un unique nombre réel α de l'intervalle $[0; 1]$ tel que

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \times \mathcal{A}(1)?$$

Justifier la réponse.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n ,

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

- a. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

- b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

- c. Sur l'annexe à rendre avec la copie, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.

À partir de u_0 , en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2 , u_3 et u_4 .

Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n , par $v_n = u_n - 6$.
- a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n , $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$.

On suppose que w_0 est strictement supérieur à 6.

Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes? Justifier.

ANNEXE Exercice 4 (à rendre avec la copie)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

