

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Polynésie juin 2009 ∞

A. P. M. E. P.

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux. Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.

Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note :

- $D$  l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- $R$  l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. **a.** Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.  
**b.** On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.  
Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942.
4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

On désigne par  $G$  la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

- a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $G$ .
- b.** Calculer à  $10^{-2}$  près l'espérance mathématique de  $G$ . Donner une interprétation de ce résultat.

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connus les résultats suivants :

- Pour tous points  $A$ ,  $B$  et  $C$  du plan d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$ , avec  $A \neq C$  et  $A \neq B$  :

$$\left| \frac{b-a}{c-a} \right| = \frac{AB}{AC} \text{ et } \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif;}$$

- Soit  $z$  un nombre complexe et soit  $\theta$  un nombre réel :  
 $z = e^{i\theta}$  si et seulement si  $|z| = 1$  et  $\arg(z) = \theta + k \times 2\pi$  où  $k$  est un entier relatif.

Démontrer que la rotation  $r$  d'angle  $\alpha$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  est la transformation du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ .

### Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique 1 cm.

Soit  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = iz + 4 + 4i.$$

- Déterminer l'affixe  $\omega$  du point  $\Omega$  tel que  $f(\Omega) = \Omega$
  - Montrer que, pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $z' - 4i = i(z - 4i)$ .
  - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .
- On note A et B les points d'affixes respectives  $a = 4 - 2i$  et  $b = -4 + 6i$ .
  - Placer les points A, B et  $\Omega$  sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.
  - Déterminer les affixes des points  $A'$  et  $B'$  images respectives des points A et B par  $f$ .
- On appelle  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  les affixes des points M, N, P et Q, milieux respectifs des segments  $[AA']$ ,  $[A'B']$ ,  $[BB']$  et  $[B'A]$ .
  - Déterminer  $m$ . On admettra que  $n = 1 + 7i$ ,  $p = -3 + 3i$  et  $q = 1 - i$ .
  - Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.
  - Déterminer la forme algébrique du nombre complexe  $\frac{q - m}{n - m}$ .  
En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.
- Démontrer que les droites  $(B'A)$  et  $(\Omega N)$  sont perpendiculaires.

### EXERCICE 2

5 points

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

#### Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connu le résultat suivant :

Une application  $f$  du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si  $f$  admet une écriture complexe de la forme  $z' = az + b$  où  $a \in \mathbb{C} - \{0\}$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

Démontrer que si A, B,  $A'$  et  $B'$  sont quatre points tels que A est distinct de B et  $A'$  est distinct de  $B'$ , alors il existe une unique similitude directe transformant A en  $A'$  et B en  $B'$ .

#### Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_A = 2i, z_B = 2, z_C = 4 + 6i, z_D = -1 + i \text{ et } z_E = -3 + 3i.$$

- Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Soit  $f$  la similitude plane directe telle que  $f(A) = D$  et  $f(B) = A$ .
  - a. Donner l'écriture complexe de  $f$ .
  - b. Déterminer l'angle, le rapport et le centre  $\Omega$  de cette similitude.
  - c. Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude  $f$ .
  - d. En déduire la nature du triangle DAE.
4. On désigne par  $(\Gamma_1)$  le cercle de diamètre  $[AB]$  et par  $(\Gamma_2)$  le cercle de diamètre  $[AD]$ .  
On note  $M$  le second point d'intersection du cercle  $(\Gamma_1)$  et de la droite  $(BC)$ , et  $N$  le second point d'intersection du cercle  $(\Gamma_2)$  et de la droite  $(AE)$ .
  - a. Déterminer l'image de  $M$  par la similitude  $f$ .
  - b. En déduire la nature du triangle  $\Omega MN$ .
  - c. Montrer que  $MB \times NE = MC \times NA$ .

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats.**

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points :  $A(1; -1; 3)$ ,  $B(0; 3; 1)$ ,  $C(6; -7; -1)$ ,  $D(2; 1; 3)$  et  $E(4; -6; 2)$ .

1. a. Montrer que le barycentre du système  $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$  est le point E.  
b. En déduire l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  de l'espace tels que

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 2\sqrt{21}.$$

2. a. Montrer que les points A, B et D définissent un plan.  
b. Montrer que la droite  $(EC)$  est orthogonale au plan  $(ABD)$ .  
c. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABD)$ .
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(EC)$ .  
b. Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite  $(EC)$  et du plan  $(ABD)$ .
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*  
Montrer que le plan  $(ABD)$  et l'ensemble  $\Gamma$ , déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats.**

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

La courbe  $(\mathcal{C})$ , donnée en annexe, est la courbe représentative d'une fonction  $f$  dérivable sur  $[0; +\infty[$ , de fonction dérivée  $f'$  continue sur  $[0; +\infty[$ .

La courbe  $(\mathcal{C})$  passe par les points O et  $A\left(1; \frac{1}{2e}\right)$  et, sur  $[0; 1]$ , elle est au dessus du segment  $[OA]$ .

1. Montrer que  $\int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2e}$ .

2. Montrer que  $\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1}{4e}$ .

**Partie B**

On sait désormais que la fonction  $f$  considérée dans la partie A est définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2 + 1}.$$

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ .  
Établir que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
3. **a.** Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $f'(x)$  et  $g(x)$  sont de signes contraires.  
**b.** En déduire les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
4. On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_n = \int_n^{2n} f(x) dx.$$

- a.** Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $0 \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$ .
- b.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$ .
- c.** En déduire la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## ANNEXE

## Exercice 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie

