# ∽ Baccalauréat S 2018 ∽

# L'intégrale des exercices de spécialité de mai à novembre 2018

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus



À la fin index des notions abordées

## Pondichéry 4 mai 2018

À toute lettre de l'alphabet on associe un nombre entier $x$ compris entre 0 et 25 comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

| Lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Lettre | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| $x$ | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Le « chiffre de RABIN » est un dispositif de cryptage asymétrique inventé en 1979 par l'informaticien Michael Rabin.

Alice veut communiquer de manière sécurisée en utilisant ce cryptosystème. Elle choisit deux nombres premiers distincts $p$ et $q$. Ce couple de nombres est sa clé privée qu'elle garde secrète.
Elle calcule ensuite $n = p \times q$ et elle choisit un nombre entier naturel $B$ tel que $0 \leqslant B \leqslant n-1$.
Si Bob veut envoyer un message secret à Alice, il le code lettre par lettre.
Le codage d'une lettre représentée par le nombre entier $x$ est le nombre $y$ tel que :

$$y \equiv x(x+B)\ [n] \text{ avec } 0 \leqslant y \leqslant n.$$

Dans tout l'exercice on prend $p = 3$, $q = 11$ donc $n = p \times q = 33$ et $B = 13$.

**Partie A : Cryptage**

Bob veut envoyer le mot « NO » à Alice.

1. Montrer que Bob code la lettre « N » avec le nombre 8.
2. Déterminer le nombre qui code la lettre « O ».

**Partie B : Décryptage**

Alice a reçu un message crypté qui commence par le nombre 3.
Pour décoder ce premier nombre, elle doit déterminer le nombre entier $x$ tel que :

$$x(x+13) \equiv 3\ [33] \text{ avec } 0 \leqslant x < 26.$$

1. Montrer que $x(x+13) \equiv 3$ [33] équivaut à $(x+23)^2 \equiv 4$ [33].
2. **a.** Montrer que si $(x+23)^2 \equiv 4$ [33] alors le système d'équations $\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 4\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ est vérifié.
   **b.** Réciproquement, montrer que si $\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 4\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ alors $(x+23)^2 \equiv 4$ [33].
   **c.** En déduire que $x(x+13) \equiv 3\ [33] \iff \left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$
3. **a.** Déterminer les nombres entiers naturels $a$ tels que $0 \leqslant a < 3$ et $a^2 \equiv 1$ [3].
   **b.** Déterminer les nombres entiers naturels $b$ tels que $0 \leqslant b < 11$ et $b^2 \equiv 4$ [11].
4. **a.** En déduire que $x(x+13) \equiv 3 \quad [33]$ équivaut aux quatre systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{lccl}x & \equiv & 2 & [3]\\ x & \equiv & 8 & [11]\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lccl}x & \equiv & 0 & [3]\\ x & \equiv & 1 & [11]\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lccl}x & \equiv & 2 & [3]\\ x & \equiv & 1 & [11]\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lccl}x & \equiv & 0 & [3]\\ x & \equiv & 8 & [11]\end{array}\right.$$

   **b.** On admet que chacun de ces systèmes admet une unique solution entière $x$ telle que $0 \leqslant x < 33$.
   Déterminer, sans justification, chacune de ces solutions.
5. Compléter l'algorithme en **Annexe** pour qu'il affiche les quatre solutions trouvées dans la question précédente.
6. Alice peut-elle connaître la première lettre du message envoyé par Bob ?
   Le « chiffre de RABIN » est-il utilisable pour décoder un message lettre par lettre ?

# ANNEXE

# À COMPLÉTER ET À REMETTRE AVEC LA COPIE

## EXERCICE 4 (spécialité)

```
Pour ...... allant de ...... à .......
   Si le reste de la division de ....... par ....... est égal à ....... alors
      Afficher .......
   Fin Si
Fin Pour
```

## Liban 28 mai 2018

On définit la suite de réels $(a_n)$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & a_n + a_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1. \end{array}\right.$$

On appelle cette suite la suite de Fibonacci.

**1.** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable $A$ contienne le terme $a_n$.

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 2 à n :
    C ← A + B
    A ← …
    B ← …
Fin Pour
```

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite $a_n$ :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |

**2.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2$, $A^3$ et $A^4$.

Vérifier que $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

**3.** On peut démontrer, et nous admettrons, que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

**a.** Soit $p$ et $q$ deux entiers naturels non nuls. Calculer le produit $A^p \times A^q$ et en déduire que

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q.$$

**b.** En déduire que si un entier $r$ divise les entiers $a_p$ et $a_q$, alors $r$ divise également $a_{p+q}$.

**c.** Soit $p$ un entier naturel non nul.

Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur $n$, que pour tout entier naturel $n$ non nul, $a_p$ divise $a_{np}$.

**4.** **a.** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si $n$ est un entier naturel qui n'est pas premier, alors $a_n$ n'est pas un nombre premier.

**b.** On peut calculer $a_{19} = 4\,181 = 37 \times 113$.

Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question 4. a. ?

## Amérique du Nord 29 mai 2018

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.
Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.
On note $u_n$ le nombre de campagnols et $v_n$ le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012+n$.

**Partie A - Un modèle simple**

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} & = & 2\times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

**1.** **a.** On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Déterminer la matrice $A$ telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier $n$ et donner la matrice $U_0$.

**b.** Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018.

**2.** Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{15\,000}\begin{pmatrix} 1 & -5\,000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}$.

On admet que $P^{-1}$ est la matrice inverse de la matrice $P$ et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

**a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

**b.** Donner sans justification l'expression de la matrice $D^n$ en fonction de $n$.

**c.** On admet que, pour tout entier naturel $n$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{2,8\times 10^7 + 2\times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n & = & \dfrac{1\,400 + 400\times 0,7^n}{15} \end{array}\right.$$

Décrire l'évolution des deux populations.

**Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité**

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent.
On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 1,1u_n - 0,001u_n \times v_n \\ v_{n+1} & = & 2\times 10^{-7}u_n \times v_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

Le tableau ci-dessous présente ce nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité :

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Modèle de la **partie B** | | |
| 2 | $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
| 3 | 0 | 2 000 000 | 120 |
| 4 | 1 | 1 960 000 | 120 |
| 5 | 2 | 1 920 800 | 119 |
| 6 | 3 | 1 884 228 | 117 |
| 7 | 4 | 1 851 905 | 114 |
| 8 | 5 | 1 825 160 | 111 |
| 9 | 6 | 1 804 988 | 107 |
| 10 | 7 | 1 792 049 | 103 |
| 11 | 8 | 1 786 692 | 99 |
| 12 | 9 | 1 789 005 | 94 |
| 13 | 10 | 1 798 854 | 91 |
| 14 | 11 | 1 815 930 | 87 |
| 15 | 12 | 1 839 780 | 84 |
| 16 | 13 | 1 869 827 | 81 |
| 17 | 14 | 1 905 378 | 79 |
| 18 | 15 | 1 945 622 | 77 |
| 19 | 16 | 1 989 620 | 77 |
| 20 | 17 | 2 036 288 | 76 |
| 21 | 18 | 2 084 374 | 77 |
| 22 | 19 | 2 132 440 | 78 |
| 23 | 20 | 2 178 846 | 80 |
| 24 | 21 | 2 221 746 | 83 |
| 25 | 22 | 2 259 109 | 87 |
| 26 | 23 | 2 288 766 | 91 |
| 27 | 24 | 2 308 508 | 97 |

1. Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?
2. Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?

**Partie C**

Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.
Est - il possible de donner à $u_0$ et $v_0$ des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel $n$ on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$ ? (On parle alors d'état stable.)

## Centres étrangers 11 juin 2018

Le but de cet exercice est d'envisager une méthode de cryptage à clé publique d'une information numérique, appelée système RSA, en l'honneur des mathématiciens Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, qui ont inventé cette méthode de cryptage en 1977 et l'ont publiée en 1978.

Les questions 1 et 2 sont des questions préparatoires, la question 3 aborde le cryptage, la question 4 le décryptage.

**1.** Cette question envisage de calculer le reste dans la division euclidienne par 55 de certaines puissances de l'entier 8.

**a.** Vérifier que $8^7 \equiv 2 \mod 55$.
En déduire le reste dans la division euclidienne par 55 du nombre $8^{21}$.

**b.** Vérifier que $8^2 \equiv 9 \mod 55$, puis déduire de la question **a.** le reste dans la division euclidienne par 55 de $8^{23}$.

**2.** Dans cette question, on considère l'équation $(E)\ \ 23x - 40y = 1$, dont les solutions sont des couples $(x\,;\ y)$ d'entiers relatifs.

**a.** Justifier le fait que l'équation $(E)$ admet au moins un couple solution.

**b.** Donner un couple, solution particulière de l'équation $(E)$.

**c.** Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E)$.

**d.** En déduire qu'il existe un unique entier $d$ vérifiant les conditions $0 \leqslant d < 40$ et $23d \equiv 1 \mod 40$.

**3.** Cryptage dans le système RSA

Une personne A choisit deux nombres premiers $p$ et $q$, puis calcule les produits $N = pq$ et $n = (p-1)(q-1)$. Elle choisit également un entier naturel $c$ premier avec $n$.

La personne A publie le couple $(N\,;\ c)$, qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et $N-1$.

Pour crypter un entier $a$ de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste $b$ dans la division euclidienne par $N$ du nombre $a^c$, et le nombre crypté est l'entier $b$.

Dans la pratique, cette méthode est sûre si la personne A choisit des nombres premiers $p$ et $q$ très grands, s'écrivant avec plusieurs dizaines de chiffres.

On va l'envisager ici avec des nombres plus simples : $p = 5$ et $q = 11$.

La personne A choisit également $c = 23$.

**a.** Calculer les nombres $N$ et $n$, puis justifier que la valeur de $c$ vérifie la condition voulue.

**b.** Un émetteur souhaite envoyer à la personne A le nombre $a = 8$.
Déterminer la valeur du nombre crypté $b$.

**4.** Décryptage dans le système RSA

La personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel $d$ vérifiant les conditions $0 \leqslant d < n$ et $cd \equiv 1 \mod n$.

Elle garde secret ce nombre $d$ qui lui permet, et à elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté $b$, la personne A calcule le reste $a$ dans la division euclidienne par $N$ du nombre $b^d$, et le nombre en clair – c'est-à-dire le nombre avant cryptage – est le nombre $a$.

On admet l'existence et l'unicité de l'entier $d$, et le fait que le décryptage fonctionne.

Les nombres choisis par A sont encore $p = 5$, $q = 11$ et $c = 23$.

**a.** Quelle est la valeur de $d$ ?

**b.** En appliquant la règle de décryptage, retrouver le nombre en clair lorsque le nombre crypté est $b = 17$.

## Antilles–Guyane 19 juin 2018

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

— une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;

— une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.
On note, pour l'année $2017 + n$ :

— $\ell_n$ la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;

— $q_n$ la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

— chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achètent de nouveau une carte de pêche libre l'année suivante ;

— Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achètent une carte de pêche libre l'année suivante ;

— En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0{,}4$ et $q_0 = 0{,}6$.

On note, pour tout entier naturel $n$, $P_n = \begin{pmatrix}\ell_n\\ q_n\end{pmatrix}$.

**1.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $P_{n+1} = MP_n$, où $M$ est la matrice carrée $\begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}$.

**2.** Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.

**3.** Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

| | |
|---|---|
| 1 ∘ | $M := \{\{0{,}65, 0{,}45\}, \{0{,}35, 0{,}55\}\}$<br>$\checkmark\ M := \begin{pmatrix}0,65 & 0,45\\ 0,35 & 0,55\end{pmatrix}$ |
| 2 ∘ | $P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$<br>$\checkmark\ P_0 := \begin{pmatrix}0,4\\ 0,6\end{pmatrix}$ |
| 3 ∘ | $Q := \{\{9, 1\}, \{7, \text{-}\ 1\}\}$<br>$\checkmark\ Q := \begin{pmatrix}9 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}$ |
| 4 ∘ | $T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$<br>$\checkmark\ T := \begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}$ |

| | |
|---|---|
| 5 ∘ | $TQ$<br>$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ |
| 6 ∘ | $QT$<br>$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ |
| 7 ∘ | $D := TMQ$<br>$\rightarrow\ D := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ |

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

**a.** Justifier que $Q$ est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
On notera $Q^{-1}$ la matrice inverse de $Q$.

**b.** Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

**4.** On admet que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$M^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n\\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n\end{pmatrix}.$$

**a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $P_n = M^nP_0$.

**b.** Justifier que, pour tout entier naturel $n$ :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^n.$$

**5.** La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

## Polynésie 20 juin 2018

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

**Partie A - Étude d'un premier milieu**

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.
On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.
On note $a_n$ la probabilité que l'atome soit dans un état stable et $b_n$ la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, $n$ nanosecondes après le début de l'observation.
On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
On appelle $X_n$ la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.
L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer $a_1$ puis $b_1$ et montrer que $a_2 = 0,993\,025$ et $b_2 = 0,006\,975$.
2. Déterminer la matrice $A$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} = X_n A$.
   $A$ est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
   On admet alors que, pour tout entier naturel $n$, $X_n = X_0 A^n$.
3. On définit la matrice $P$ par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.
   On admet que $P$ est inversible et que
   $$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer la matrice $D$ définie par $D = P^{-1}AP$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel $n$,
   $$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120\left(1 - 0,395^n\right) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}.$$
   En déduire une expression de $a_n$ en fonction de $n$.
6. Déterminer la limite de la suite $(a_n)$. Conclure.

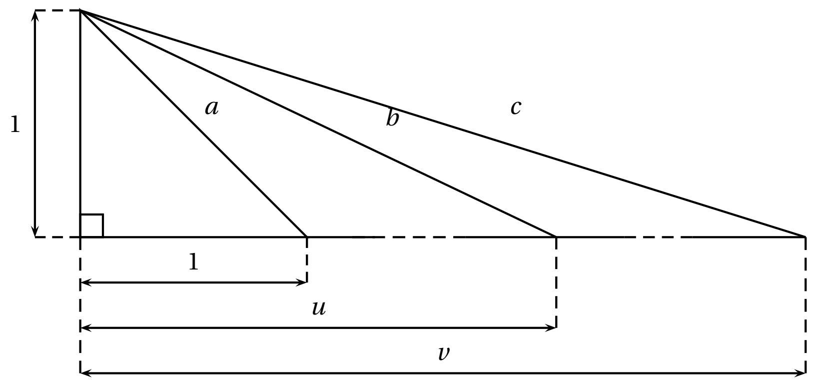
**Partie B - Étude d'un second milieu**

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note $a$ cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,01$.

1. Donner, en fonction de $a$, la matrice de transition $M$ dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %.
   On admet qu'il existe un unique vecteur $X$, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la valeur de $a$.

## Asie 21 juin 2018

On s'intéresse à la figure suivante, dans laquelle $a$, $b$ et $c$ désignent les longueurs des hypoténuses des trois triangles rectangles en O dessinés ci-dessous.




**Problème :** on cherche les couples de **nombres entiers naturels non nuls** $(u,\ v)$ tels que $ab = c$.

1. Modélisation
   Démontrer que les solutions du problème sont des solutions de l'équation :

$$(E) : \quad v^2 - 2u^2 = 1 \quad (v \text{ et } u \text{ étant des entiers naturels non nuls}).$$

2. Recherche systématique de solutions de l'équation $(E)$
   Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche au cours de son exécution tous les couples solutions de l'équation pour lesquels $1 \leqslant u \leqslant 1\,000$ et $1 \leqslant v \leqslant 1\,000$.

| | |
|---|---|
| Pour $u$ allant de 1 à … faire | Au cours de son exécution, |
| Pour … | l'algorithme affiche : |
| Si … | 2 3 |
| Afficher $u$ et $v$ | 12 17 |
| Fin Si | 70 99 |
| Fin Pour | 408 577 |
| Fin Pour | |

3. Analyse des solutions éventuelles de l'équation $(E)$
   On suppose que le couple $(u,\ v)$ est une solution de l'équation $(E)$.
   **a.** Établir que $u < v$.
   **b.** Démontrer que $n$ et $n^2$ ont la même parité pour tout entier naturel $n$.
   **c.** Démontrer que $v$ est un nombre impair.
   **d.** Établir que $2u^2 = (v-1)(v+1)$.
   En déduire que $u$ est un nombre pair.

4. Une famille de solutions
   On assimile un couple de nombres entiers $(u,\ v)$ à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

   On définit également la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

   **a.** Démontrer que si une matrice colonne $X$ est une solution de l'équation $(E)$, alors $AX$ est aussi une solution de l'équation $(E)$.
   **b.** Démontrer que si une matrice colonne $X$ est une solution de l'équation $(E)$, alors pour tout entier naturel $n$, $A^n X$ est aussi une solution de l'équation $(E)$.
   **c.** À l'aide de la calculatrice, donner un couple $(u,\ v)$ solution de l'équation $(E)$ tel que $v > 10\,000$.

# Métropole–La Réunion 22 juin 2018

**Partie A**

On considère l'équation suivante dont les inconnues $x$ et $y$ sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (E)$$

1. Déterminer un couple solution $(x\ ;\ y)$ où $x$ et $y$ sont deux entiers naturels.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   On définit les suites d'entiers naturels $(x_n)$ et $\left(y_n\right)$ par :

   $$x_0 = 1,\ y_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n,\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

   **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, le couple $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ est solution de l'équation $(E)$.

   **b.** En admettant que la suite $(x_n)$ est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $x_{n+1} > x_n$.
3. En déduire que l'équation $(E)$ admet une infinité de couples solutions.

**Partie B**

Un entier naturel $n$ est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier $p$ de $n$, $p^2$ divise $n$.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie A, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

2. Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels.

   Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.
3. Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution de l'équation $(E)$ définie dans la partie A, alors $x^2 - 1$ et $x^2$ sont des entiers consécutifs puissants.
4. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

   Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.

## Antilles–Guyane 6 septembre 2018

**1.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n$ et $u_{n+1}$ sont premiers entre eux.

**2.** Démontrer que les termes de la suite $(u_n)$ sont alternativement pairs et impairs.

**3.** L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.

Affirmation : « Si $p$ est un nombre premier impair, alors $u_p$ est premier. »

**4.** **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $2u_n = 3^n - 1$.

**b.** Déterminer le plus petit entier naturel non nul $n$ tel que $3^n$ est congru à 1 modulo 7.

**c.** En déduire que $u_{2022}$ est divisible par 7.

**5.** **a.** Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.

**b.** Sans justification, recopier et compléter le tableau suivant :

| Reste de la division euclidienne de $m$ par 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5 | | | | | |

**c.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, si $u_n$ est congru à 4 modulo 5, alors $u_{n+4}$ est congru à 4 modulo 5.

**d.** Existe-t-il un entier naturel $n$ tel que le reste de la division euclidienne de $u_n$ par 5 soit égal à 2 ?

## Métropole–La Réunion 13 septembre 2018

**Partie A**

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n.$$

**1.** Calculer $u_2$ et $u_3$ .

**2.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $U_{n+1} = AU_n$.

**3.** On considère de plus les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

**a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $A^n = 2^n B + 4^n C$.

**b.** On admet que, pour tout entier naturel $n$, on a : $U_n = A^n U_0$.
Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 2 \times 4^n - 2^n$.

**Partie B**

On dit qu'un entier naturel $N$ est parfait lorsque la somme de ses diviseurs (positifs) est égale à $2N$.
Par exemple, 6 est un nombre parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6 et on a : $1+2+3+6 = 12 = 2 \times 6$.
Dans cette partie, on cherche des nombres parfaits parmi les termes de la suite $(u_n)$ étudiée dans la partie A.

**1.** Vérifier que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 2^n p_n$ avec $p_n = 2^{n+1} - 1$.

**2.** On considère l'algorithme suivant où $N$, $S$, $U$, $P$ et $K$ sont des entiers naturels.

```
S ← 0

Demander à l'utilisateur la valeur de N
P ← 2^(N+1) − 1
U ← 2^N P

Pour K variant de 1 à U
      Si U/K est un nombre entier
            S ← S + K
      Fin Si
Fin Pour

Si S = 2U
      Afficher « oui »
Sinon
      Afficher « non »
Fin Si
```

**a.** À quelle question permet de répondre cet algorithme ?
Compléter, sans justification, les cases vides du tableau donné en annexe. Il n'est pas demandé au candidat de programmer l'algorithme.

**b.** Faire une conjecture donnant une condition suffisante sur $P$ pour que l'algorithme affiche « oui ».

**3.** Dans cette question, on suppose que $p_n$ est un nombre premier. On note $S_n$ la somme des diviseurs de $u_n$.

**a.** Montrer que $S_n = (1 + p_n)\, p_n$.

**b.** En déduire que $u_n$ est un nombre parfait.

# Annexe à remettre avec la copie

## Exercice 4

### Affichage de l'algorithme pour les premières valeurs de $N$

| $N$ | $P$ | $U$ | $S$ | Affichage final |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | non |
| 1 | 3 | 6 | 12 | oui |
| 2 | 7 | | | |
| 3 | 15 | | 360 | |
| 4 | 31 | | 992 | oui |
| 5 | 63 | | 6 552 | non |
| 6 | 127 | 8 128 | 16 256 | |

## Amérique du Sud 12 novembre 2018

Pour tout entier naturel $n$ , on note $F_n$ le $n$-ième nombre de Fermat. Il est défini par

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

**Partie A :**

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que :

« Tous les nombres de Fermat sont premiers »,

L'objectif est de tester cette conjecture.

1. **a.** Calculer $F_0$, $F_1$, $F_2$ et $F_3$.
   **b.** Peut-on en déduire que tous les nombres de Fermat sont premiers ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
F ← 2^(2^5) + 1
N ← 2
Tant que F%N ≠ 0
    N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

$F\%N$ désigne le reste de la division euclidienne de $F$ par $N$.

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.
Que peut-on en déduire ?

**Partie B :**

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul on a $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$.
2. Pour tout entier naturel $n$ on note :

$$\prod_{i=0}^{n} F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1} \times F_n.$$

On a donc $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) \times F_n$.
Montrer par récurrence et en utilisant le résultat de la question précédente que pour tout entier naturel $n$ non nul on a :

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2.$$

3. Justifier que, pour tous entiers naturels $n$ et $m$ tels que $n > m$, il existe un entier naturel $q$ tel que $F_n - qF_m = 2$.
4. En déduire que deux nombres de Fermat sont toujours premiers entre eux.

## Nouvelle Calédonie 27 novembre 2018

On appelle suite de Fibonacci la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On admet que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est un entier naturel.

*Les parties* A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

**Partie A**

**1.** **a.** Calculer les termes de la suite de Fibonacci jusqu'à $u_{10}$.

**b.** Que peut-on conjecturer sur le PGCD de $u_n$ et $u_{n+1}$ pour tout entier naturel $n$ ?

**2.** On définit la suite $(v_n)$ par $v_n = u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1}$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

**a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $v_{n+1} = -v_n$.

**b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

**c.** Démontrer alors la conjecture émise à la question **1. b.**

**Partie B**

On considère la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**1.** Calculer $F^2$ et $F^3$. On pourra utiliser la calculatrice.

**2.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

**3.** **a.** Soit $n$ un entier naturel non nul. En remarquant que $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n$, démontrer que

$$u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n.$$

**b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2.$$

**4.** On donne $u_{12} = 144$.

Démontrer en utilisant la question **3.** qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.

Donner la longueur des deux autres côtés.

# Index