Entrée École de santé des armées avril 2024

Durée : 1 heure 30 minutes   Coefficient : 2

IMPORTANT

- L'utilisation de téléphone portable, de calculatrice, de règle à calculs, de formulaires, de papier millimétré est interdite.
- Il est interdit de signer sa copie ou d'y mettre un signe distinctif quelconque.
- Écrivez au stylo-bille, encre bleue ou noire, non effaçable. Attention, utilisation restreinte de blanc correcteur (de préférence, rayer l'erreur).
- Vérifiez que ce fascicule comporte 7 pages dont une page de garde comprise.
- Toutes les réponses aux QCM doivent être faites sur la grille de réponses jointe. Si le candidat répond aux QCM sur le fascicule ou la copie et non sur la grille, ses réponses ne seront pas prises en compte par le correcteur.
- Pour chacun des QCM, les candidats doivent cocher les lettres des propositions qu'ils considèrent comme correctes. Il est demandé aux candidats de faire très attention au numéro de QCM quand ils « cochent» la grille de réponses jointe.
- Il sera tenu compte de la qualité de la présentation de la copie et de l'orthographe. Aucun brouillon ne sera pris en compte.

EXERCICE 1 - 6 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui parait exacte **en cochant la case sur la grille prévue à cet effet**.
Toute réponse juste est comptée +1 point, toute réponse fausse est comptée −0,25 point.
Une absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1

Le prix d'un médicament au cours de l'année 2023 a été multiplié par 4.

A. Le prix a augmenté de 400 % en 2023.
B. Le prix a augmenté de 500 % en 2023.
C. Pour retrouver sa valeur du début de l'année 2023, le prix doit diminuer de 75 % en 2024.
D. Pour retrouver sa valeur du début de l'année 2023, le prix doit diminuer de 80 % en 2024.

QCM 2

Dans une population, un individu sur 5 est vacciné. On sait de plus que la probabilité qu'un individu soit malade, sachant qu'il est vacciné, est égale à $\frac{1}{10}$. Enfin, la probabilité qu'un

individu ne soit pas vacciné sachant qu'il est malade est 5 fois plus grande que la probabilité qu'un individu soit vacciné sachant qu'il est malade.
La probabilité qu'un individu soit malade est alors :

A. $\dfrac{2}{5}$ **B.** $\dfrac{3}{20}$ **C.** $\dfrac{2}{15}$ **D.** $\dfrac{3}{25}$

QCM 3
Soit l'équation : $(\ln(x))^2+4\ \ln(x)-5=0$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de cette équation est :

A. $\varnothing$ **B.** $\{-5\ ;\ 1\}$ **C.** $\{2\}$ **D.** $\left\{\text{e}^{-5}\ ;\ \text{e}\right\}$

QCM 4
Soit l'équation : $\text{e}^{x^2+4x}=\dfrac{1}{\text{e}^4}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de cette équation est :

A. $\varnothing$ **B.** $\{-2\}$ **C.** $\{-2\ ;\ 1\}$ **D.** $\{0\ ;\ 2\}$

QCM 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2\text{e}^x}{1+\text{e}^x}$. La fonction dérivée f' de la fonction f est telle que $f'(x)=\ldots$

A. -2 **B.** $\dfrac{-2\text{e}^x-4\text{e}^{2x}}{(1+\text{e}^x)^2}$ **C.** $\dfrac{-2\text{e}^x}{(1+\text{e}^x)^2}$ **D.** $\dfrac{-2\text{e}^x-4\text{e}^{x^2}}{(1+\text{e}^x)^2}$

QCM 6
La limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-5}-x\right)$

A. $+\infty$ **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

EXERCICE 2 - 6 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui parait exacte **en cochant la case sur la grille prévue à cet effet**.
Toute réponse juste est comptée +1 point, toute réponse fausse est comptée $-0{,}25$ point. Une absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 7

Dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation : $2x^3-15x^2+24x-16=0$

A. a exactement deux solutions **B.** a une unique solution
C. n'a pas de solution **D.** a trois solutions

QCM 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 4x^2 + x + 10$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

A. La fonction f est convexe sur $]-2~;~+\infty[$.
B. La fonction f est concave sur $]-2~;~+\infty[$.
C. La fonction f admet trois points d'inflexion.
D. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

QCM 9
On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

A. La suite (u_n) est arithmétique.
B. La suite (u_n) est géométrique.
C. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = n^2$.
D. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 2n + 1$.

QCM 10

Un outil de chirurgie endoscopique peut être fabriqué par deux machines, la première réalisant 60 % de la production. Parmi les outils fabriqués par la première machine, 5 % sont défectueux et parmi les outils fabriqués par la deuxième machine, 4 % sont défectueux.
On note $M1$ l'évènement « l'outil est fabriqué par la première machine » et D l'évènement « l'outil présente un défaut ». On prélève un outil au hasard.

A. Les évènements $M1$ et D sont indépendants.
B. La probabilité qu'un outil présente un défaut est 0,045.
C. La probabilité qu'un outil ne présente pas de défaut est 0,954.
D. Sachant que l'outil prélevé provient de la machine 2, la probabilité qu'il présente un défaut est 0,016.

QCM 11

Soit la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à :
La dérivée f', de la fonction f a pour expression :

A. $\dfrac{\ln(3)}{3}$ **B.** $\dfrac{(\ln(3))^2}{3}$ **C.** $\dfrac{(\ln(3))^2}{2}$ **D.** $\dfrac{\ln(9)}{2}$

QCM 12
Une classe de l'ESA comprend 20 étudiants, 80% d'entre-eux réussissent le concours de fin d'année. On considère que les résultats des élèves à l'examen sont indépendants les uns des autres.

A. La probabilité de l'évènement « au moins un étudiant réussit son concours en fin d'année » est supérieure à 0,99.
B. La probabilité qu'aucun étudiant ne réussisse son concours est 0.
C. Il est impossible que tous les étudiants échouent au concours.
D. La probabilité qu'un étudiant exactement réussisse le concours est 0,8.

EXERCICE 3 - 8 points

L'objet de ce problème est d'étudier l'évolution du nombre de bactéries dans un milieu au cours du temps. On introduit un million de bactéries dans ce milieu de culture à $t = 0$.

Le nombre de bactéries (en millions), à l'instant t (en heures), est donné par une fonction f strictement positive et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, qui vérifie l'équation (E) suivante :

$$f'(t) = af(t)\left[1 - \frac{f(t)}{100}\right] \text{ pour } t > 0$$

où a est une constante strictement positive.

1. **a.** Démontrer que f vérifie l'équation (E) si et seulement si $g = \dfrac{1}{f}$ est solution de l'équation différentielle (E') suivante : $y' + ay = \dfrac{a}{100}$.
   b. Trouver une fonction constante solution de (E').
   c. En déduire la solution générale g de l'équation (E').
   d. Montrer que la solution f de l'équation (E) vérifiant $f(0) = 1$ est donnée par :
   $$f(t) = \frac{100}{1 + 99\mathrm{e}^{-at}} \text{ pour tout } t \text{ dans } [0\ ;\ +\infty[.$$
2. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c. Déduire des questions précédentes un encadrement de f par deux réels.
   d. Démontrer qu'il existe un unique réel t_0 strictement positif tel que $f(t_0) = 50$.
3. **a.** Démontrer que $f''(t) = a\left(1 - \dfrac{f(t)}{50}\right)f'(t)$.
   b. Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire les conséquences d'un point de vue mathématique d'une part et médical d'autre part.
4. Exprimer t_0 en fonction de a.
5. Exprimer, en fonction de a et t_0, le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0.
6. Tracer dans une repère orthogonal une allure de la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.