Entrée à Sciences Po

ADMISSION AU COLLÈGE UNIVERSITAIRE 2013

MATHEMATIQUES

durée de l'épreuve : 3h

Les calculatrices sont autorisées.

Exercice Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse

1. On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $\dfrac{4}{5}$, et on pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ pour tout entier naturel non nul n.
   La suite (S_n) converge vers 5.
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$ pour tout entier naturel n.
   La suite (v_n) est géométrique.
3. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1, u_{n+1} = u_n + 1$ et $v_n = \text{e}^{-u_n}$ pour tout entier naturel n.
   La suite (v_n) est convergente.
4. Une entreprise de sondage réalise une enquête par téléphone. On admet que la probabilité que la personne contactée accepte de répondre est égale à 0,2.
   Si un enquêteur contacte 50 personnes, la probabilité qu'au moins six personnes acceptent de lui répondre est supérieure à 0,95.
5. Toute suite non majorée diverge vers $+\infty$.
6. L'équation $\ln(x) + \ln(x + 1) = \ln(2)$ admet le réel 1 pour unique solution.
7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2\text{e}^{-x}$.
   La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.
8. L'équation $x^3 + 4x^2 + 4x = -2$ a exactement trois solutions réelles.
9. Voici un algorithme :

Entrée	Saisir un entier naturel a

Traitement	Affecter à n la valeur 1 et à c la valeur 1
	Tant que $c < a$
	    Affecter à n la valeur $n + 1$.
	    Affecter à c la valeur $c + n^2$
	Fin du Tant que

Sortie	Afficher la valeur de n

   Si on saisit pour a la valeur 20, alors la sortie vaut 4.
10. On lance deux dés cubiques et non truqués. On appelle X la variable aléatoire donnant le plus grand des deux chiffres obtenus.
   L'espérance de la variable aléatoire X est : $\text{E}(X) = \dfrac{161}{36}$.

Problème

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left[\frac{\text{e}}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$$

et on appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$ ainsi que les limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'axe des ordonnées du repère et la courbe Γ d'équation $y = \ln\left(\frac{\text{e}}{2}x\right)$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$. On rappelle que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement représentatives de deux fonctions f et g sont asymptotes en $+\infty$ si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)] = 0$.
3. **a.** Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) < 1$.

   b. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $]0~;~+\infty[$ et en déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
4. Tracer la droite D ainsi que les courbes Γ et $\mathcal{C}$ sur le même graphique.

Partie B

On se donne un réel u_0 supérieur ou égal à 1. La suite (u_n) est définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Partie C

On admet que la limite de la suite (u_n) est égale à 1.
On se propose dans cette partie d'étudier la rapidité de convergence de la suite (u_n) vers sa limite.

1. Que peut-on dire de la suite (u_n) quand u_0 vaut 1 ?
2. Dans cette question on choisit la valeur $\frac{3}{2}$ pour u_0.

   À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs arrondies à 10^{-6} près de u_1, u_2, u_3.

   On suppose dans cette partie que le réel u_0 est strictement supérieur à 1.
3. **a.** Montrer que pour tout réel $t > -1$ on a $\ln(1 + t) \leqslant t$.

   b. Montrer que pour tout réel $h \geqslant 0$ on a

$$f(1+h) - 1 = \ln\left(1 + \frac{h^2}{2(h+1)}\right).$$

4. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

   Montrer que pour tout entier naturel n on a $v_{n+1} \leqslant \frac{v_n^2}{2}$.
5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $0 \leqslant v_n \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.
6. Dans cette question, on choisit à nouveau la valeur $\frac{3}{2}$ pour u_0.

   À partir de quel p peut-on affirmer que $u_p - 1 \leqslant 10^{-20}$?