Entrée à Sciences Po 2013

Exercice Vrai-Faux

1. FAUX.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $u_0 = -1$ donc on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n < 0$.
S_n est donc la somme de $(n+1)$ termes négatifs.
Finalement, pour tout entier naturel n, $S_n \leqslant 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \leqslant 0 < 5$.
Autre méthode :
La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $u_0 = -1$ donc on sait que $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i = (-1) \times \dfrac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} = -5\left(1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$.
Alors comme, $-1 < \frac{4}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -5$.

2. VRAI.
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 2.

3. VRAI.
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_{n+1}} = \mathrm{e}^{-u_n - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-u_n} = \frac{1}{\mathrm{e}} v_n$.
Par suite, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et de premier terme $v_0 = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{e}$.
On sait donc que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \times \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$.
Alors comme $0 < \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} = 0$.
Remarque : on peut aussi facilement justifier par récurrence que $u_n = n+1$ pour tout entier naturel n et donc que $v_n = \mathrm{e}^{-(n+1)}$ d'où comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -(n+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^X = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

4. VRAI.

On peut considérer dans le cadre d'un sondage qu'une personne accepte ou non de répondre est un événement indépendant des réponses des autres personnes sondées.
L'expérience aléatoire qui consiste à contacter une personne et que celle-ci accepte ou pas de répondre est une expérience aléatoire à 2 issues dont le paramètre de succès est 0,2.
Alors l'expérience aléatoire qui consiste à interroger 50 personnes est la répétition indépendante de 50 épreuves de Bernoulli indépendantes.
On sait alors que la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant acceptées de répondre au sondage suit une loi binomiale $\mathscr{B}(50~;~0,2)$.
On en déduit que la probabilité qu'au moins 6 personnes acceptent de répondre est donnée par $p(X \geqslant 6) = 1 - p(X \leqslant 5)$ d'où $p(X \geqslant 6) = 1 - \sum\limits_{i=0}^{5} \begin{pmatrix} 50 \\ i \end{pmatrix} 0,2^i \times 0,8^{50-i} \approx$ $0,951\,97 \geqslant 0,95$.

5. FAUX.

On considère la suite $(-1)^n n$.
Cette suite est clairement non majorée : en effet pour tout réel M, il suffit de choisir l'entier pair N supérieur à $E(M)+1$, c'est à dire $E(M)+1$ ou $E(M)+2$ et alors $u_N > M$.
Pourtant elle ne diverge pas en $+\infty$.
En effet, supposons qu'elle soit divergente en $+\infty$.
Alors pour tout réel M, il existe un entier N tel que si $n \geqslant N$, $u_n > M$. En particulier $u_{N+1} > M$ et $u_{N+2} > M$.
Mais

- si N est pair, $N+1$ est impair donc $u_{N+1} = (-1)^{N+1}(N+1) = -(N+1)$ et comme $u_N = N > M$, on obtient donc $N+1 > M$ d'où $u_{N+1} < M$: contradiction.
- si N est impair, $N+1$ est pair et comme $N+1 \geqslant N$, $u_{N+1} > M$ c'est à dire $N+1 > M$.

Or $N+2$ est impair et donc comme $N+2 > N+1$, $N+2 > M$ d'où $u_{N+2} = -(N+2) < M$: contradiction.
Dans tous les cas, la suite (u_n) ne peut être divergente en $+\infty$.

6. VRAI.

L'équation $(E) : \ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$ est définie pour $x > 0$.
Pour tout réel $x > 0$, (E) équivaut à $\ln\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) = 0$ d'où à $\frac{x(x+1)}{2} = 1$.
(E) équivaut donc $x^2 + x - 2 = 0$ et $x > 0$.
Le discriminant de $x^2 + x - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions $x_1 = \frac{-1-3}{2\times 1} = -2 < 0$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2\times 1} = 1 > 0$.
La seule solution positive de $x^2 + x - 2 = 0$ est 1 donc l'équation (E) admet bien 1 pour unique solution.

7. FAUX.

Pour tout réel x, $f'(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x} + (x+1)^2 \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}(2-(x+1)) = (1-x)(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
Par suite $f'(0) = 1$.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f'(0) = 1$ et donc n'est pas parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.

8. FAUX.

On définit la fonction $f : xf4a1x^3 + 4x^2 + 4x + 2$.
Alors l'équation $x^3 + 4x^2 + 4x = -2$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$.
Le polynôme du second degré $f'(x)$ a pour discriminant $\Delta = 16$ donc admet 2 racines $x_1 = -2$ et $x_2 = -\frac{2}{3}$.
Comme de plus son coefficient des x^2 est $3 > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]-\frac{2}{3} + \infty[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]-2 ; -\frac{2}{3}[$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty ; -2] \cup \left[-\frac{2}{3} ; +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left[-2 ; -\frac{2}{3}\right]$.
Remarquons de plus que :

- comme f se comporte à l'infinie comme son terme de plus haut degré, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $f(-2) = 2$ et $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{22}{27}$.

Alors comme la fonction f est strictement décroissante sur $\left[-2 ; -\frac{2}{3}\right]$, pour tout réel x tel que $-2 \leqslant x \leqslant -\frac{2}{3}$, $f(x) \geqslant f\left(-\frac{2}{3}\right)$ d'où $f(x) > 0$: l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\left[-2 ; -\frac{2}{3}\right]$.
De même comme la fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{2}{3} ; +\infty\right[$, pour tout réel $x \geqslant -\frac{2}{3}$, $f(x) \geqslant f\left(-\frac{2}{3}\right) > 0$: l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\left[-\frac{2}{3} ; +\infty\right[$.

Enfin la fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-2]$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $f(-2)=2>0$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-\infty;-2]$.
En conclusion, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

9. VRAI.

L'algorithme proposé calcule les termes de la suite définie par $c_1=1$ et $c_{n+1}=c_n+n^2$ pour tout entier $n>0$ tel que $u_n<20$ et affiche alors le rang pour lequel le terme de rang n dépasse a.
On a le tableau :
Donc l'algorithme s'arrête à la troisième étape, et l'algorithme affiche 4, dernière valeur affectée à n.

10. VRAI.

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{1;2;3;4;5;6\}$.
On obtient facilement (avec un tableau par exemple) que la loi de X est donnée par :
Par suite $E(X)=\sum_{i=1}^{6} i\times\frac{(2i-1)}{36}=\frac{161}{36}$.

Problème

Partie A :

1. Variations :

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de la fonction $x f 4a1 \frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ dérivable sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $]0;+\infty[$ suivie de la fonction ln dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel $x>0$, on a $f'(x)=\dfrac{\frac{e}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}}=\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x^2+1)}$.
Alors comme $x>0$, $\frac{x+1}{x(x^2+1)}>0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.
On en déduit que $f'(x)<0$ pour $x\in]0;1[$ et $f'(x)>0$ pour $x\in]1;+\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Limite en 0 :

On a par somme de limites usuelles, $\lim\limits_{x\to0^+} x+\frac{1}{x}=+\infty$ d'où comme $\frac{e}{2}>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.
Alors comme $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)=+\infty$.

Limite en

1. Préliminaires :

On a montré que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ donc $f(x)\geqslant f(1)$ pour tout réel $x\in]0;1]$.
On a aussi montré que la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$ donc $f(x)\geqslant f(1)$ pour tout réel $x\in[1;+\infty[$.
Donc $f(x)\geqslant f(1)$ pour tout réel $x\in]0;+\infty[$.
Or $f(1)=1$ donc $f(x)\geqslant 1$ pour tout réel $x>0$.
On raisonne par récurrence sur n. On définit la proposition $\mathscr{P}(n)$: $u_n\geqslant 1$.
On sait que $u_0\geqslant 1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Soit n un entier naturel. On fait l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: $u_n\geqslant 1$ est vraie.
Par suite $u_n\in]0;+\infty[$ et donc d'après le préliminaire, $f(u_n)\geqslant 1$.
Or $u_{n+1}=f(u_n)$ donc $u_{n+1}\geqslant 1$: la proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
La proposition $\mathscr{P}(n)$ est donc héréditaire.
La proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n=0$ et est héréditaire pour $n\geqslant 1$ donc d'après l'axiome de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier n.
On a donc $u_n\geqslant 1$ pour tout entier naturel n.

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$.

Or on a montré à la question **3.b.** de la partie **A.** que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x)-x \leqslant 0$.
Par suite comme on sait d'après la question précédente que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$, on en déduit que $f(u_n) - u_n \leqslant 0$ d'où $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante.
2. On a montré à la question **1.** que la suite (u_n) est minorée par 1 et à la question **2.** que la suite (u_n) est décroissante.
On peut donc affirmer que la suite (u_n) est convergente.
Remarque :
Comme la suite (u_n) est convergente et que la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$, alors on sait que la limite de la suite (u_n) vérifie l'équation $f(x) = x$.
Or on a montré à la partie **A.** que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution 1.
Donc $\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\, u_n = 1$.

Partie C :

1. Si $u_0 = 1$, alors comme $f(1) = 1$, on obtient $u_1 = 1$.
Une récurrence immédiate montre donc que la suite (u_n) est alors constante égale à 1.
2. On suppose que $u_0 = \frac{3}{2}$.
On obtient donc $u_1 = 1{,}080043$, $u_2 = 1{,}002961$ et $u_3 = 1{,}000004$.
3.a. On définit pour tout réel $t > -1$, la fonction $\psi(t) = \ln(1+t) - t$.
La fonction ψ est clairement dérivable sur $]-1;+\infty[$ et pour tout réel $t > -1$, $\psi'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$.
Comme $t > -1$, $1 + t > 0$ et donc $\psi'(t)$ est du signe de $-t$ sur $]-1;+\infty[$.
Alors on en déduit que ψ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et croissante sur $]-1;0]$.
Par suite $\psi(t) \leqslant \psi(0)$ pour tout réel $t \in]-1;+\infty[$.
Ainsi comme $\psi(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$, on obtient donc $\psi(t) \leqslant 0$ d'où $\ln(1+t) - t \leqslant 0$ c'est à dire $\ln(1+t) \leqslant t$ pour tout réel $t > -1$.
3.b. Soit h un réel positif.
Alors $f(1+h)-1 = \ln\left(\frac{e}{2}\left(1+h+\frac{1}{1+h}\right)\right) - \ln(e) = \ln\left(\frac{\frac{e}{2} \times \frac{(1+h)^2+1}{1+h}}{e}\right) = \ln\left(\frac{2(1+h)+h^2}{2(h+1)}\right) = \ln\left(1 + \frac{h^2}{2(h+1)}\right)$.
4. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = f(u_n) - 1$.
On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$ donc pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1 \geqslant 0$.
Remarquons alors que $u_n = 1 + v_n$ avec $v_n \geqslant 0$.
Par suite d'après la question précédente, on obtient $v_{n+1} = f(1+v_n) - 1 = \ln\left(1 + \frac{{v_n}^2}{2(v_n+1)}\right)$.
Par suite, d'après la question **3.a.**, on obtient $v_{n+1} \leqslant \frac{{v_n}^2}{2(1+v_n)}$ en posant $t = \frac{{v_n}^2}{2(1+v_n)} > -1$ puisque $v_n \geqslant 0$.
Enfin comme $v_n \geqslant 0$, $1 + v_n \geqslant 1$ d'où $\frac{1}{1+v_n} \leqslant 1$ et donc $\frac{{v_n}^2}{2(1+v_n)} \leqslant \frac{{v_n}^2}{2}$.
Par conséquent, on en déduit $v_{n+1} \leqslant \frac{{v_n}^2}{2}$.
5. On sait déjà que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$ donc $v_n = u_n - 1 \geqslant 0$.
On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{Q}(n) : v_n \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.
On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{1-1}} = 2 \times \frac{v_1}{2} = v_1$ donc $v_1 \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{1-1}}$ et la proposition $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
Soit alors n un entier naturel non nul.
On fait l'hypothèse de récurrence $\mathcal{Q}(n) : v_n \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$ est vraie.
On a montré à la question **4.** que $v_{n+1} \leqslant \frac{{v_n}^2}{2}$.
Alors d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient $v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \times \left(2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}\right)^2$ d'où $v_{n+1} \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}\times 2}$ c'est à dire $v_{n+1} \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{(n+1)-1}}$: la proposition $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
La proposition $\mathcal{Q}(n)$ est donc héréditaire.
La proposition $\mathcal{Q}(n)$ est vraie au rang $n \geqslant 1$ et est héréditaire pour $n \geqslant 1$ donc d'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Par conséquent pour tout entier naturel non nul, on a $0 \leqslant v_n \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

6. On a $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $u_1 = \ln\left(\frac{e}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)\right) = \ln\left(\frac{13e}{12}\right)$.

D'après la question précédente, comme $v_n = u_n - 1$, on sait donc que $0 \leqslant u_n - 1 \leqslant 2\left(\frac{\ln\left(\frac{13e}{12}\right)-1}{2}\right)^{2^{p-1}}$.

Il suffit donc de déterminer le rang p tel que $2\left(\frac{\ln\left(\frac{13e}{12}\right)-1}{2}\right)^{2^{p-1}} \leqslant 10^{-20}$ pour que $u_p - 1 \leqslant 10^{-20}$.

On obtient donc $2\left(\frac{\ln(13)-\ln(12)}{2}\right)^{2^{p-1}} \leqslant 10^{-20}$ d'où $2^{p-1}\ln\left(\frac{\ln(13)-\ln(12)}{2}\right) \leqslant -20\ln(10) - \ln(2)$ puis $2^{p-1}\ln\left(\frac{2}{\ln(13)-\ln(12)}\right) \geqslant 20\ln(5)+21\ln(2)$.

Finalement $(p-1)\ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{20\ln(5)+21\ln(2)}{\ln(2)-\ln(\ln(13)-\ln(12))}\right)$ puis $p \geqslant 1+\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{20\ln(5)+21\ln(2)}{\ln(2)-\ln(\ln(13)-\ln(12))}\right)$.

On obtient donc $p \geqslant 4,86$ d'où $p = 5$.

Comme la suite (u_n) est décroissante et que $u_5 - 1 \leqslant 10^{-20}$, on peut assurer qu'à partir de $p = 5$, $u_p - 1 \leqslant 10^{-20}$.

On a en effet :

- $u_4 \approx 1,000\,000\,000\,000\,955\,993\,6$ donc $u_4 - 1 \approx 9,55 \times 10^{-12}$
- $u_5 \approx 1,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,046$ donc $u_5 - 1 \approx 4,57 \times 10^{-23} \leqslant 10^{-20}$.