∽ SciencesPo ADMISSION AU COLLÈGE UNIVERSITAIRE ∽

Samedi 22 février 2020

durée de l'épreuve : 3h - coefficient 2
Les calculatrices sont autorisées.

Exercice Vrai-Faux **12 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. **Affirmation** : le carré d'un nombre réel est toujours supérieur ou égal à ce nombre.

2. **Affirmation** la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 4^{3n-1}$ est une suite géométrique.

3. On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $\dfrac{2}{3}$ et on pose

   $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ pour tout entier naturel non nul n.

   Affirmation : la suite (S_n) converge vers 9.

4. Dans le cadre d'un prêt, la première mensualité comprend 350 euros d'intérêts. Chaque mensualité comprend ensuite 2 euros de moins d'intérêts que la précédente.

   Affirmation : le montant des intérêts versés après 100 mensualités est de 25 000 euros.

5. Dans une ville où il pleut un jour sur quatre, une personne se rend à son travail à pied ou en voiture. Lorsqu'il pleut, elle se rend à son travail en voiture dans 80 % des cas et lorsqu'il ne pleut pas elle y va à pied dans 60 % des cas.

   Affirmation : cette personne utilise sa voiture pour se rendre à son travail un jour sur deux.

6. Dans un groupe de 120 personnes, 36 sont inscrites dans un club sportif.

   Affirmation : la probabilité que deux personnes choisies au hasard dans le groupe soient inscrites dans un club sportif vaut $0,088$ à 10^{-3} près.

7. Je lance 10 fois un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

   Affirmation : le nombre de fois où j'obtiens la face 3 est égal en moyenne à $\dfrac{10}{3}$.

8. **Affirmation** : l'équation $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

9. f désigne la fonction définie sur $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\ln x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

   Affirmation : la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$.

10. La fonction g est définie sur $]3\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

    Affirmation : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction g dans un repère du plan.

11. Étant donné un repère du plan, on considère la droite d passant par le point A$(-2\ ;\ 1)$ et admettant $\overrightarrow{u}(2\ ;\ 1)$ pour vecteur directeur.

    Affirmation : une équation cartésienne de d est : $x - 2y + 4 = 0$.

12. Les points A, B et C ont pour coordonnées dans un repère orthonormé du plan : A(1 ; 1), B(a : 3), $C(a+2\ ;\ a+3)$ où a désigne un nombre réel.

    Affirmation : les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.

Problème — 8 points

Partie A

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. Après avoir calculé la dérivée de la fonction f dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$ en précisant la valeur exacte du maximum.

Partie B

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. a. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   b. On admet que la limite α de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(\alpha) = \alpha$. Déterminer la valeur de α.

Partie C

On considère la suite (S_n), définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

1. Dans l'algorithme ci-dessous. u et S désignent des nombres réels et k un nombre entier. Compléter cet algorithme pour qu'à la fin de son exécution la variable S contienne S_{50}

```
u ← 1
S ← …
Pour k variant de 1 à …
    u ← …
    S ← …
Fin Pour
```

2. Déterminer la valeur décimale de S_{50} arrondie au millième.