Entrée à Sciences Po annale 0

4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices est autorisé.
Ce problème comporte 4 parties. La partie III et la partie IV peuvent être traitées indépendamment des parties I et II.
Les résultats établis dans la partie I pourront être utilisés dans la partie II.
Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

Partie I

Dans cette partie, a est un réel strictement positif donné.

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel strictement positif par :

$$f(x) = x\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right).$$

a. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et que, pour tout x réel strictement positif,

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x+a}.$$

b. Montrer que la fonction f' est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et calculer $f''(x)$ pour tout x réel strictement positif.

c. Étudier les variations de la fonction f'.

d. Déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x réel strictement positif, puis le sens de variation de la fonction f.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n).$$

a. Étudier la monotonie de la suite (v_n).
En déduire celle de la suite (u_n).

b. Déterminer la limite en 0 de la fonction qui à tout x strictement positif associe $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

c. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Partie II

Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt d'une fraction d'année

On considère un capital S_0 que l'on place de différentes façons.

1. La somme S_0 est placée durant une année au taux annuel de r %, r est un réel strictement positif.

a. De quelle somme dispose-t-on au bout d'une année de placement ?

b. Application numérique :
On a un taux de $5\,\%(r = 5)$ et $S_0 = 10\,000$ euros.
De quelle somme dispose-t-on au bout d'une année de placement ?

2. Soit n un entier naturel non nul. L'année est divisée en n périodes de durées égales.

La somme S_0 est placée au taux d'intérêt de $\dfrac{r}{n}$ % pour chaque période, r est un réel strictement positif.

Dans ce cas la somme S_1 placée au début de la deuxième période est la somme S_0 à laquelle on ajoute les intérêts obtenus au cours de la première période.

De même la somme S_k, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, placée au début de la $(k+1)^{\text{e}}$ période est la somme S_{k-1} à laquelle ont été ajoutés les intérêts obtenus au cours de la k^{e} période.

a. De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une période ?

b. Montrer qu'à l'issue d'une année de placement, on dispose de la somme $S_n = S_0 \times u_n$ où u_n est le terme général de la suite (u_n) définie dans la partie I pour une valeur de a que l'on donnera en fonction de r et de n.

c. Déterminer la limite de la somme S_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Interpréter ce résultat.

d. Comparer les placements des questions 1 et 2. Lequel est le plus avantageux ?

e. Application numérique : on a un taux de $5\%(r = 5)$, $n = 12$ et $S_0 = 10\,000$ euros.
Quelle somme obtient-on au bout d'une année de placement ? Retrouver le résultat du **d.**

3. Soit n un entier naturel non nul. L'année est divisée en n périodes de durées égales.

La somme S_0 est placée au taux d'intérêt de r_n % pour chacune de ces périodes, r_n est un réel strictement positif indépendant de la période considérée.

a. De quelle somme dispose-t-on au bout d'une année de placement, le principe étant le même que celui de la question 2 ?

b. On souhaite que le placement de la somme S_0 dans ce cas, rapporte autant au bout d'un an que si S_0 était placée au taux annuel de r % , c'est-à-dire comme à la question 1.
Exprimer alors r_n en fonction de r et de n.

c. Application numérique :
On a un taux de $5\,\%(r = 5)$, $n = 12$.
Quel est le taux de placement pour chaque période dans ce cas ?

Partie III

Placements avec taux d'intérêt instantané variable

La somme S_0 est placée pour tout réel t positif au taux d'intérêt instantané $i(t)$ où t représente la durée du placement, exprimée en années.
Soit la fonction S qui à chaque réel t positif associe la somme $S(t)$, disponible au bout de t années.
On suppose que la fonction S est :
— dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$
— solution de l'équation différentielle $y' = i(t)y$.
On a $y(0) = S_0$.

1. Déterminer la fonction S lorsque la fonction i est une fonction constante sur $[0\,;\,+\infty[$, c'est-à-dire telle qu'il existe un réel strictement positif b pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $i(t) = b$.
2. On suppose que la fonction i est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Soit I la primitive de i sur $[0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 0.
   a. Exprimer $I(t)$ à l'aide d'une intégrale pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $\varphi(t) = \mathrm{e}^{I(t)}S(t)$.
   Montrer que φ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et calculer $\varphi'(t)$ pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$.
   En déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0 et de $I(t)$ pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$.
3. Application numérique :
   Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $i(t) = b\left(1 + a\sin t\mathrm{e}^{-t}\right)$.
   a. Calculer $\displaystyle\int_0^t \sin x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$ en utilisant le théorème d'intégration par parties.
   b. Quelle est la somme $S(t)$ obtenue au bout de t années de ce placement.

Partie IV

Un organisme financier propose un placement attractif en ce temps de crise, au taux garanti de 5 % par an comme dans l'application numérique de la partie **II - 1**.
On considère un club d'investissement dont on décide de numéroter les adhérents $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$.
Soit p un réel donné de l'intervalle $]0\,;\,1[$.
La personne numéro 1 décide d'investir dans ce placement et en parle à la personne numéro 2 qui fait de même avec la probabilité p ou décide de ne pas le faire avec la probabilité $q = 1 - p$.
Le processus se poursuit ainsi :
La personne numéro n informe de sa propre décision la personne numéro $(n+1)$.
La personne numéro $(n+1)$ fait le même choix que la personne numéro n avec la probabilité p ou fait le choix contraire avec la probabilité $q = 1 - p$.
Soit R_n l'évènement : « La personne numéro n investit dans le placement » et $p(R_n) = p_n$ la probabilité de cet évènement.

1. Donner la valeur de p_1.
   Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,
   $p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p$.
2. Que se passe-t-il si $p = \dfrac{1}{2}$?
3. On suppose désormais $p \neq \dfrac{1}{2}$ et on pose $w_n = p_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout entier naturel n strictement positif.
   a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer w_n puis p_n en fonction de n, pour tout entier naturel n strictement positif.
   c. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$. Interpréter ce résultat.
4. Soit $p = 0,08$.
   a. Quelle est la probabilité que la 20[e] personne investisse dans ce placement ?
   b. Quelle est la plus petite valeur de l'entier naturel n non nul, à partir de laquelle la probabilité que la personne numéro n investisse dans le placement soit comprise entre 0,499 99 et 0,500 01 ?