Durée : 4 heures

Baccalauréat C Étranger groupe I juin 1987

EXERCICE 1 **4 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
Soit A $(6~;~0~;~0)$ et B$(0~;~6~;~0)$. Faire une figure.

1. Déterminer le barycentre G du système (O, 1), (A, 2), (B, 3). Le placer sur la figure.
2. Soit C$(0~;~0~;~4)$. Déterminer l'ensemble S des points M de l'espace définis par

$$\left(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MC}=0.$$

   Donner une équation cartésienne de S.
3. Déterminer l'intersection de S et du plan d'équation $x=0$.
   Dessiner cette intersection sur la figure.
4. Soit P l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{MO}2+2\text{MA}^2-3\text{MB}^2=24$. Montrer que G appartient à P. Déterminer P.

EXERCICE 2 **5 points**

Étant donné trois nombres réels strictement positifs α, β et γ on rappelle qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle dont les côtés mesurent respectivement α, β et γ est que :

$$|\alpha-\gamma|<\beta<\alpha+\gamma.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'unité 1 cm.
a est un réel donné strictement positif. On prendra pour la figure $a=2$.

1. On appelle R, l'ensemble des points M du plan de coordonnées x et y tels qu'il existe un triangle ABC dont les côtés AB, BC et CA mesurent respectivement $2a$, y et x. Montrer que R est formé des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient $|2a-x|<y<2a+x$.
   Représenter R sur la figure.
2. Quel est l'ensemble des points M de R tels que le triangle ABC soit isocèle (on envisagera les différents cas possibles).
   Représenter cet ensemble sur la figure.
3. Quel est l'ensemble des points M de R tels que le triangle ABC soit rectangle en C ?
   Le représenter sur la figure.
4. Montrer que l'ensemble des points M de R tels que le triangle ABC soit rectangle en A, est inclus dans l'hyperbole H d'équation $y^2-x^2=4a^2$.
   Déterminer les coordonnées de ses sommets et préciser ses asymptotes.
   Construire H toute entière sur la figure.

PROBLÈME **11 points**

m étant un nombre réel, on appelle f_m l'application de $]0~;~+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui, à x, associe

$$f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{m}{2}\ln x.$$

et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (on choisit pour unité de longueur 5 cm).

A. L'objet de la partie A est l'étude de f_m

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_m(x)$.
   Calculer, suivant les valeurs de m, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_m(x)$.
2. Calculer $f'_m(x)$ et donner suivant les valeurs de m, les différents tableaux de variation possibles.
3. **a.** Montrer que, par un point $M_0\left(x_0\,;\,y_0\right)$ vérifiant $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$, il passe une et une seule courbe $\mathcal{C}_m$.
   b. Montrer qu'il existe un point unique A appartenant à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$.
   c. Construire $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_{-1}$.

B. Dans la partie B, on considère la fonction f_4 telle que

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - 2\ln x.$$

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit $x > 0$.
   a. Calculer $\displaystyle\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ (on pourra utiliser une intégration par partie).
   b. Calculer $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f_4(t)\,\mathrm{d}t$.
   c. Chercher $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.
2. **a.** Montrer que l'équation $f_4(x) = 0$ possède deux solutions et deux seulement dont l'une x_0 appartient à $[3\,;\,4]$. (On ne demande pas de calculer x_0 ici.)
   Montrer que $x_0 = \sqrt{1 + 8\ln x_0}$.
   b. Soit $\begin{array}{llll} \varphi : & [3\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) = \sqrt{1 + 8\ln x} \end{array}$
   Montrer que $\varphi(x) \geqslant 3$ et que $0 \leqslant \varphi'(x) \leqslant \dfrac{4}{9}$.
   c. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} =< \varphi\left(u_n\right) = \sqrt{1 + 8\ln\left(u_n\right)}.$$

   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$.
   d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - x_0| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - x_0|$. (On appliquera l'inégalité des accroissements finis).
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$; en déduire la convergence de (u_n).
   Trouver un entier n_0 tel que $\left|u_{n_0} - x_0\right| < 10^{-2}$.
   Calculer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.