Solution de Roger Cuculière (Clichy La Garenne)

Soit (E, f) une telle solution. On note I le plus grand (au sens de l'inclusion) intervalle de E contenant 0.

Lemme 1. *On a* $f(0) = 0$. *Les ensembles* E *et* I *sont ouverts et l'application* f *est continue sur* E.

Preuve.

• On montre d'abord que $f(0) \neq \pm 1$ par l'absurde. Si $f(0) = \varepsilon = \pm 1$, puisque f est non constante, il existe $x_0 \in$ E tel que $f(0)f(x_0) \neq 1$ et donc

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) = \frac{f(x_0) + f(0)}{1 - f(x_0)f(0)} = \frac{f(x_0) + \varepsilon}{1 - \varepsilon f(x_0)},$$

ce qui conduit à $f(x_0)^2 = -1$, impossible.

Ainsi, $f(0)^2 \neq 1$, et par suite

$$f(0) = f(0+0) = \frac{2f(0)}{1 - f(0)^2},$$

ce qui implique $f(0) = 0$.

• Comme E est un voisinage de 0, il existe un réel $r > 0$ tel que $[-r, r] \subset \mathrm{E}$. Soit $x_0 \in$ E. En raison de la continuité de f en 0, il existe un réel ρ, avec $0 < \rho \leq r$, tel que $|x| \leq \rho$ implique $x \in \mathrm{E}$ et $|f(x)f(x_0)| < 1$.

Soit un réel h tel que $|h| \leq \rho$. Alors, $h \in \mathrm{E}$ et $|f(x_0)f(h)| < 1$. Donc $x_0 + h \in$ E. Il en résulte $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \subset \mathrm{E}$. Comme ceci est vrai de tout $x_0 \in$ E, il s'ensuit que E est ouvert.

• Soit $x_0 \in$ I, d'où $x_0 \in$ E. On a vu qu'il existe $\rho > 0$ tel que $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \subset \mathrm{E}$.. L'ensemble $\mathrm{J} = \mathrm{I} \cup [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ est un intervalle tel que $0 \in$ J et $\mathrm{J} \subset \mathrm{E}$, d'où $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, et par suite $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \subset \mathrm{I}$, ce qui prouve que l'intervalle I est ouvert.

• Soit $x_0 \in$ E, et le réel ρ défini ci-dessus. On a vu que si h est un réel tel que $|h| \leq \rho$, alors $h \in \mathrm{E}$ et $|f(x_0)f(h)| < 1$, d'où $x_0 + h \in$ E. De plus,

$$f(x_0 + h) = \frac{f(x_0) + f(h)}{1 - f(x_0)f(h)}.$$

Puisque f est continue en 0, $\lim_{h \to 0} f(h) = f(0) = 0$, d'où $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, ce qui prouve que la fonction f est continue en x_0.

Lemme 2. *Soit* $\mathrm{I}_+ = \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$. *Il existe* $x \in \mathrm{I}_+$ *tel que* $|f(x)| \geq 1$.

Preuve.

• On commence par montrer que f n'est pas identiquement nulle sur I_+. Par l'absurde, on suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}_+$. Soit toujours $r > 0$ tel que $[-r, r] \subset \mathrm{E}$, d'où $[-r, r] \subset \mathrm{I}$, et $[0, r] \subset \mathrm{I}_+$. On a donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, r]$. Si $x \in [0, r]$, alors $x \in$ E, $-x \in$ E, et $f(x)\,f(-x) = 0 \neq 1$. En conséquence,

$$0=f(0)=f\left(x+(-x)\right)=\frac{f(x)+f(-x)}{1-f(x)f(-x)}=f(-x).$$

D'où $f(x)=0$ pour tout $x\in[-r,r]$. Pour $x\in[-r,r]$, $f(x)^2=0\neq 1$, donc $2x$ appartient à E et

$$f(2x)=\frac{2f(x)}{1-f(x)^2}=0.$$

Ainsi, $[-2r,2r]\subset \mathrm{E}$ et f est nulle sur $[-2r,2r]$. Par récurrence, on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $[-2^n r,2^n r]\subset \mathrm{E}$ et que f est nulle sur $[-2^n r,2^n r]$. Ainsi, l'ensemble E est égal à $\mathbb{R}$ tout entier, et la fonction f est nulle, ce qui est exclu par hypothèse.

• On montre maintenant l'existence de $x\in \mathrm{I}_+$ tel que $|f(x)|\geq 1$. Par l'absurde, on suppose que $|f(x)|<1$ pour tout $x\in \mathrm{I}_+$. On a alors, pour tout $x\in \mathrm{I}_+$, $f(x)^2\neq 1$ donc $2x$ appartient à E. Ainsi, $[0,2r]\subset \mathrm{I}_+$ et, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, $[0,2^n r]\subset \mathrm{I}_+$, puis $\mathrm{I}_+=\mathbb{R}_+$. On fixe alors $x\in\mathbb{R}_+$ et on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\left|f\left(2^n x\right)\right|$. Alors $0\leq u_n<1$, et $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{1-u_n^2}$.

Cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc convergente, et sa limite L vérifie $\mathrm{L}(1-\mathrm{L}^2)=2\mathrm{L}$, soit $\mathrm{L}=0$, ce qui implique $u_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et en particulier $|f(x)|=u_0=0$. On a alors $f(x)=0$ pour tout $x\in \mathrm{I}_+$, ce que contredit le premier point.

Lemme 3. *Il existe un unique réel $a\in \mathrm{I}_+$ tel que $|f(a)|=1$ et $|f(x)|<1$ pour $x\in[0,a[$. De plus, $-a\in \mathrm{I}$, $|f(-a)|=1$, et $|f(x)|<1$ pour $x\in\,]-a,0]$.*

Preuve.

• On montre l'existence de a. Il existe $x\in \mathrm{I}_+$ tel que $|f(x)|\geq 1$. On pose alors

$$a=\inf\left\{x\in \mathrm{I}_+\;\middle|\;|f(x)|\geq 1\right\}.$$

C'est un élément de I_+. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I_+ qui converge vers a et telle que $\left|f\left(x_n\right)\right|\geq 1$. Par continuité de f, $\left|f(a)\right|\geq 1$, et par suite $a>0$. De plus, pour tout $x\in[0,a[$, $x\in \mathrm{I}_+$ et $|f(x)|<1$, d'où, par continuité de f, $\left|f(a)\right|\leq 1$, et finalement $|f(a)|=1$.

• L'unicité de ce réel a est immédiate, car s'il existait deux tels réels distincts a_1 et a_2, avec $a_1<a_2$, on devrait avoir à la fois $\left|f\left(a_1\right)\right|<1$ et $\left|f\left(a_1\right)\right|=1$.

• Pour le reste du lemme, si le couple (E, f) convient, on pose $\mathrm{E}^*=-\mathrm{E}$ et pour $x\in \mathrm{E}^*$, $f^*(x)=f(-x)$. Le couple (E^*, f^*) convient, et l'intervalle I correspondant est

$I^* = -I$. Il existe donc $a^* \in I \cap R_+$ tel que $\left|f^*\left(a^*\right)\right| = 1$ et tel que $\left|f^*(x)\right| < 1$ pour $x \in [0, a^*[$. En posant $b = -a^*$, on a $b \in I$, $b < 0$, $\left|f(b)\right| = 1$, et $\left|f(x)\right| < 1$ pour $x \in \,]b, 0]$. Il s'agit de montrer que $b = -a$. Si l'on avait $a + b > 0$, alors $0 < -b < a$, d'où $-b \in I_+$ et $\left|f(-b)\right| < 1$. Par suite, $\left|f(b)f(-b)\right| = \left|f(-b)\right| < 1$, et

$$0 = f(0) = f\left(b + (-b)\right) = \frac{f(b) + f(-b)}{1 + f(b)f(-b)},$$

ce qui implique $f(-b) = -f(b)$, et $\left|f(-b)\right| = \left|f(b)\right| = 1$, contradiction.

Si l'on avait $a + b < 0$, alors $b < -a < 0$, d'où $-a \in I$ et $\left|f(-a)\right| < 1$. Par suite, $\left|f(a)f(-a)\right| = \left|f(-a)\right| < 1$, et

$$0 = f(0) = f\left(a + (-a)\right) = \frac{f(a) + f(-a)}{1 - f(a)f(-a)},$$

ce qui implique $f(-a) = -f(a)$ puis $\left|f(-a)\right| = \left|f(a)\right| = 1$, contradiction.

Finalement, $a + b = 0$, soit $b = -a$.

Lemme 4. *On a* $I =]-2a, 2a[$, *et pour* $x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Preuve.

• On montre d'abord l'inclusion $]-2a, 2a[\subset I$. Soit $x \in \,]-2a, 2a[$, d'où $\frac{x}{2} \in \,]-a, a[$.

Alors, $\frac{x}{2} \in I$ et $f\left(\frac{x}{2}\right)^2 < 1$, d'où $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \in E$. Ceci prouve l'inclusion $]-2a, 2a[\subset E$, d'où $]-2a, 2a[\subset I$.

• On montre que f est impaire sur $]-2a, 2a[$. D'abord, pour $x \in \,]-a, a[$, $\left|f(x)\right| < 1$, $\left|f(-x)\right| < 1$ et alors

$$0 = f(0) = f\left(x + (-x)\right) = \frac{f(x) + f(-x)}{1 - f(x)f(-x)},$$

d'où $f(-x) = -f(x)$. Maintenant, pour $x \in \,]-2a, 2a[$, $\frac{x}{2} \in \,]-a, a[$, d'où $\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1$, $\left|f\left(-\frac{x}{2}\right)\right| < 1$, $f\left(-\frac{x}{2}\right) = -f\left(\frac{x}{2}\right)$. On en déduit que

$$f(x) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - f\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

et

$$f(-x)=\frac{2f\left(-\frac{x}{2}\right)}{1-f\left(-\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{-2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1-f\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-f(x).$$

• On montre enfin l'inclusion $\mathrm{I}\subset\left]-2a,2a\right[$. Puisque I est un invervalle contenant $]-2a, 2a[$, il suffit de montrer que $2a$ et $-2a$ n'appartiennent pas à I. Soit un réel h tel que $0 < h < a$. On a $0 < a - h < a$, d'où $f(a - h)^2 < 1$, et

$$f(2a-2h)=\frac{2f(a-h)}{1-f(a-h)^2}.$$

En conséquence, si $f(a) = 1$, alors $\lim\limits_{h\to 0,\, h>0} f(2a-2h)=+\infty$. Et si $f(a) = -1$, alors $\lim\limits_{h\to 0,\, h>0} f(2a-2h)=-\infty$. Dans les deux cas, $2a$ n'appartient pas à I car f est continue sur I. On prouve de même que $-2a \notin$ I.

Lemme 5. *Pour* $x \in\ ]0, 2\mathrm{a}[, f(x) \neq 0$ et $f(2a-x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Preuve. Si $x \in\ ]0, 2a[$, alors $2a - x \in\ ]0, 2a[$, d'où $x \in$ E et $2a - x \in$ E. Si l'on avait $f(x)f(2a - x) \neq 1$, alors $2a = x + (2a - x) \in$ E, ce qui n'est pas. On en déduit $f(x)f(2a - x) = 1$, soit $f(x) \neq 0$ et $f(2a-x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Lemme 6. *Les réels* $4a$ *et* $-4a$ *appartiennent à* E *et* $f(4a) = f(-4a) = 0$. *De plus,*

$$\mathrm{E}=\mathbb{R}\setminus(2a+4a\mathbb{Z})=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-2a+4ka,2a+4ka\right[.$$

Enfin, la fonction f *est périodique, de période* $4a$.

Preuve.

• On a $0<\left|f\left(\frac{a}{2}\right)\right|<1$. D'où $\left|f\left(\frac{3a}{2}\right)\right|=\left|f\left(2a-\frac{a}{2}\right)\right|=\dfrac{1}{\left|f\left(\frac{a}{2}\right)\right|}>1$.

En conséquence $3a=\dfrac{3a}{2}+\dfrac{3a}{2}$ appartient à E, et

$$f(3a)=\frac{2f\left(\frac{3a}{2}\right)}{1-f\left(\frac{3a}{2}\right)^2}=\frac{\dfrac{2}{f\left(\frac{a}{2}\right)}}{1-\dfrac{1}{f\left(\frac{a}{2}\right)^2}}=\frac{2f\left(\frac{a}{2}\right)}{f\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}=-f(a).$$

Il en résulte $f(3a)f(a) = -f(a)^2 \neq 1$, d'où $4a = 3a + a$ appartient à E, et

$$f(4a) = f(3a+a) = \frac{f(3a)+f(a)}{1-f(3a)f(a)} = 0.$$

On a de même $-\frac{3a}{2} \in \mathrm{I}$, $f\left(-\frac{3a}{2}\right) = -f\left(\frac{3a}{2}\right)$, $\left|f\left(-\frac{3a}{2}\right)\right| > 1$, $-3a \in$ E, $f(-3a)$ $= -f(3a)$, $-4a \in$ E, et enfin $f(-4a) = 0$.

• Pour le second point, si $x \in$ E, alors $f(x)f(4a) = f(x)f(-4a) = 0$, d'où $x + 4a \in$ E et $x - 4a \in$ E, et par suite

$$\mathrm{E} = \mathbb{R} \setminus (2a + 4a\mathbb{Z}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-2a + 4ka, 2a + 4ka[.$$

• Pour finir, pour $x \in$ E, $f(x + 4a) = f(x - 4a) = f(x)$.

Lemme 7. *Soit φ l'application définie sur* E *par* $\varphi(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4a}\right)$.

1. *Pour $x \in]-2a, 2a[$, si $f(x) = \varphi(x)$, alors* $f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$.

2. *Pour $x, y \in]-2a, 2a[$, si $f(x) = \varphi(x)$ et si $f(y) = \varphi(y)$, alors*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

3. *On suppose $f(a) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in [[0, 2n]]$,* alors

$$f\left(\frac{k}{2^n}a\right) = \varphi\left(\frac{k}{2^n}a\right).$$

Preuve.

• Pour le premier point, on remarque que la fonction φ admet E pour ensemble de définition et satisfait à l'équation fonctionnelle proposée. Si $x \in]-2a, 2a[$, alors $\left|\frac{x}{2}\right| < a$, d'où $\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1$, et par ailleurs $\left|\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1$. On a donc

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1-f\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Et aussi

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\varphi\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

L'hypothèse $f(x) = \varphi(x)$ se traduit par

$$\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1-f\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\varphi\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

On note $u = f\left(\frac{x}{2}\right)$, $v = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$, qui sont tels que $|u| < 1$, $|v| < 1$. Il vient

$$0 = \frac{u}{1-u^2} - \frac{v}{1-v^2} = \frac{(u-v)(1+uv)}{\left(1-u^2\right)\left(1-v^2\right)}.$$

On en conclut $u = v$, soit $f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$.

• Pour le deuxième point, soit $x, y \in\ ]-2a, 2a[$. Alors

$$\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1, \left|f\left(\frac{y}{2}\right)\right| < 1, \left|\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1, \left|\varphi\left(\frac{y}{2}\right)\right| < 1.$$

Si de plus $f(x) = \varphi(x)$ et $f(y) = \varphi(y)$, on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right), f\left(\frac{y}{2}\right) = \varphi\left(\frac{y}{2}\right),$$

et par suite

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{y}{2}\right)}{1-f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{y}{2}\right)} = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

• Le troisième point se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in [[0, 2^{n+1}]]$.

Si k est pair, alors $k = 2h$, $h \in \mathbb{N}$, $0 \leq h \leq 2^n$, et par suite

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}a\right) = f\left(\frac{h}{2^n}a\right) = \varphi\left(\frac{h}{2^n}a\right) = \varphi\left(\frac{k}{2^{n+1}}a\right).$$

Si k est impair, alors $k = 2h + 1$, $h \in \mathbb{N}$, $0 \leq h < 2^n$, et, d'après le point précédent,

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}a\right) = f\left(\frac{2h+1}{2^{n+1}}a\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2^n}a+\frac{h+1}{2^n}a\right)\right)$$
$$= \varphi\left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2^n}a+\frac{h+1}{2^n}a\right)\right) = \varphi\left(\frac{2h+1}{2^{n+1}}a\right) = \varphi\left(\frac{k}{2^{n+1}}a\right).$$

On est maintenant en mesure de conclure.

Théorème.

Les couples (E, f) *répondant à la question sont exactement, pour* $m \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathrm{E} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2|m|}+\frac{k\pi}{|m|}, \frac{\pi}{2|m|}+\frac{k\pi}{|m|}\right[, f : x \mapsto \tan(mx).$$

Preuve.

• Le réel a est défini au lemme 3. On a donc $f(a) = \pm 1$.

• On suppose d'abord $f(a) = 1$. On pose

$$\varphi(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4a}\right),$$

et

$$\mathrm{F} = \left\{\frac{k}{2^n}a \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, k \in [\![0, 2^n]\!]\right\}.$$

D'après le lemme 7, pour tout $x \in$ F, on a $f(x) = \varphi(x)$. L'ensemble F est dense dans le segment $[0, a]$. Les fonctions f et φ étant continues sur $[0, a]$, on en déduit l'égalité $f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in [0, a]$. Il résulte du lemme 5 que $f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in [0, 2a[$, puis du lemme 4 que $f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in]-2a, 2a[$ et enfin, du lemme 6, que $f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in$ E. En posant $m = \dfrac{\pi}{4a}$, on trouve le résultat annoncé.

• On suppose maintenant que $f(a) = -1$. On observe alors que le couple (E, $-f$) convient. Dans ce cas, on a $-f(a) = 1$, d'où $-f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in$ E, soit $f(x) = -\varphi(x)$ pour tout $x \in$ E. En posant $m = -\dfrac{\pi}{4a}$, on trouve encore le résultat annoncé.