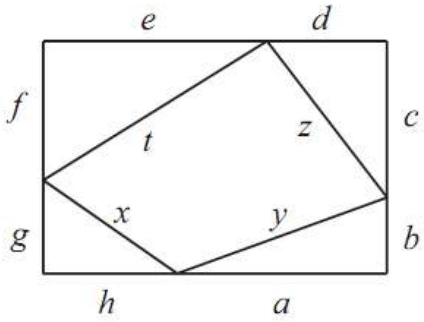
Solution de Albert Marcout (Sainte Savine)

Avec les notations indiquées sur la figure :



$$\begin{aligned} S &= x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \\ &= (g^2+h^2)+(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+(e^2+f^2) \\ &= (a^2+h^2)+(b^2+c^2)+(d^2+e^2)+(f^2+g^2). \end{aligned}$$

$(a^2+h^2) = (a+h)^2 - 2ah = 16 - 2ah.$

$(b^2+c^2) = (b+c)^2 - 2bc = 9 - 2bc.$

$(d^2+e^2) = (d+e)^2 - 2de = 16 - 2de.$

$(f^2+g^2) = (f+g)^2 - 2fg = 9 - 2fg.$

Comme la somme $a + h$ est fixe et égale à 4, le produit ah est maximum quand $a = h = \frac{4}{2} = 2$. Donc le minimum de $16 - 2ah$ est $16 - 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$.

De même le minimum de $16 - 2bc$ est obtenu pour $b = c = \frac{3}{2}$ et vaut $9 - 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

Le minimum de S est donc $8 + 8 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 25$. Il est obtenu par le losange des milieux des côtés. Le maximum de S est évidemment obtenu pour le rectangle lui même et vaut $16 + 16 + 9 + 9 = 50$. Finalement :

$$25 \le x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \le 50.$$