∽ Baccalauréat C Sport-études juin 1981 ∾

EXERCICE 1

1. E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, φ est l'endomorphisme de E tel que

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi\left(\vec{\imath}\right)=-\frac{1}{3}\vec{\imath}+\frac{2}{3}\vec{\jmath}-\frac{2}{3}\vec{k}\\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right)=\frac{2}{3}\vec{\imath}-\frac{1}{3}\vec{\jmath}-\frac{2}{3}\vec{k}\\ \varphi\left(\vec{k}\right)=-\frac{2}{3}\vec{\imath}-\frac{2}{3}\vec{\jmath}-\frac{1}{3}\vec{k}.\end{array}\right.$$

   a. Démontrer que φ est un endomorphisme orthogonal.

   b. Donner la définition analytique de φ et déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

2. $\mathscr{E}$ est un espace affine associé à E rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On donne le point O$'$ de coordonnées $(1~;~1~;~-1)$. On désigne par f l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont l'endomorphisme associé est φ et telle que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}'$.
   Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

n étant un entier relatif on considère les nombres A et B, $A = 5n - 11$, $B = 2n - 6$.

1. Trouver deux entiers relatifs α et β tels que $\alpha A + \beta B$ soit indépendant de n ; en déduire que tout nombre divisant A et B divise un nombre C indépendant de n et que tout nombre divisant A et C divise B.
   Que peut-on en conclure pour le P.G.C.D. de A et B ?
2. Déterminer suivant les valeurs de n le P.G.C.D. de A et B.
   Pour cela on pourra utiliser la classe d'équivalence de A dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel réel dont $(1, \mathrm{i})$ est une base.

Partie A

Pour tout nombre réel a, on note f_a l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f_a(z) = (1 + \mathrm{i}a)\mathrm{e}^a z - \mathrm{i}a\mathrm{e}^a\overline{z}$$

($\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z).
Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications f_a lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout a, f_a est une application linéaire et écrire sa matrice dans la base $(1, \mathrm{i})$.
   En déduire que f_a est bijective.

2. Montrer que pour tout couple $(a,\ a')$ de réels $f_a \circ f_{a'} = f_{a+a'}$ ($\circ$ désigne la loi de composition des applications).

   En déduire la structure de $(\mathscr{A}, \circ)$ et définir l'application réciproque de f_a.

3. Pour tout nombre complexe z, on pose

$$z_1 = f_a(z) \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad z_{n+1} = f_a(z_n)$$

   Calculer z_n en fonction de a, n, z.

Partie B

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Pour tout réel a, soit F_a l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f_a(z)$. Montrer que F_a est définie analytiquement dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \text{e}^a(x - 2ay)\\ y' &=& \text{e}^a y. \end{array}\right.$$

   Quel est l'ensemble des points invariants par F_a ?

2. Montrer que pour tout couple $(a,\ a')$ de réels $F_a \circ F_{a'} = F_{a+a'}$.

   Montrer que F_a est bijective. Définir F_a^{-1}, l'application réciproque de F_a.

3. Soit $(\mathscr{C})$ l'ensemble dont une équation dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est

$$x^2 - 4axy + \left(8a^2 - 1\right)y^2 + 4a\text{e}^{-ax} - 8a^2\text{e}^{-a}y + (4a - 1)\text{e}^{-2a} = 0.$$

   a. Vérifier que $(\mathscr{C})$ n'est pas vide.

   b. Trouver une équation de l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par F_a. Préciser la nature de $(\mathscr{C}')$ suivant les valeurs de a.

Partie C

Soit dans $\mathscr{P}$ la relation binaire $\mathscr{R}$ définie par

$$\forall (M,\ M') \in \mathscr{P}^2, \quad [M\mathscr{R}M' \iff \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } M' = F(M)$$

.

1. Montrer en utilisant les résultats B 2. que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Quel que soit α réel, on note Δ_α la classe d'équivalence du point A de coordonnées $(\alpha\,;\,0)$.

   Montrer que, suivant les valeurs de α, Δ_α est soit un point, soit une demi-droite que l'on précisera.

3. Quel que soit β réel on note Γ_β la classe d'équivalence du point B de coordonnées $(0\,;\,\beta)$.

   Pour $\beta \neq 0$ trouver une équation de Γ_β dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Montrer que quel que soit β, Γ_β est globalement invariante par toute application F_a.

Partie D

β étant un paramètre réel strictement positif, on définit l'application g_β de $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} g_\beta(x) & = & -2x\text{Log}\,\dfrac{x}{\beta} \quad \text{si } x > 0,\\ g_\beta(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

1. Étudier g_β et représenter graphiquement g_β dans un repère $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, e désignant le nombre réel dont le logarithme népérien est égal à 1.

2. En déduire la représentation Γ_{e}, classe d'équivalence du point B de coordonnées $(0\,;\,\text{e})$, définie dans la question C 3.