

♣ Baccalauréat C Sport-études juin 1981 ♣

EXERCICE 1

1. E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, φ est l'endomorphisme de E tel que

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}. \end{cases}$$

- a. Démontrer que φ est un endomorphisme orthogonal.
b. Donner la définition analytique de φ et déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.
2. \mathcal{E} est un espace affine associé à E rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne le point O' de coordonnées $(1; 1; -1)$. On désigne par f l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} dont l'endomorphisme associé est φ et telle que $f(O) = O'$. Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

n étant un entier relatif on considère les nombres A et B , $A = 5n - 11$, $B = 2n - 6$.

1. Trouver deux entiers relatifs α et β tels que $\alpha A + \beta B$ soit indépendant de n ; en déduire que tout nombre divisant A et B divise un nombre C indépendant de n et que tout nombre divisant A et C divise B .
Que peut-on en conclure pour le P.G.C.D. de A et B ?
2. Déterminer suivant les valeurs de n le P.G.C.D. de A et B .
Pour cela on pourra utiliser la classe d'équivalence de A dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est un espace vectoriel réel dont $(1, i)$ est une base.

Partie A

Pour tout nombre réel a , on note f_a l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$f_a(z) = (1 + ia)e^a z - ia e^{a\bar{z}}$$

(\bar{z} désigne le nombre conjugué de z).

Soit \mathcal{A} l'ensemble des applications f_a lorsque a décrit \mathbb{R} .

1. Montrer que pour tout a , f_a est une application linéaire et écrire sa matrice dans la base $(1, i)$. En déduire que f_a est bijective.
2. Montrer que pour tout couple (a, a') de réels $f_a \circ f_{a'} = f_{a+a'}$ (\circ désigne la loi de composition des applications).
En déduire la structure de (\mathcal{A}, \circ) et définir l'application réciproque de f_a .
3. Pour tout nombre complexe z , on pose

$$z_1 = f_a(z) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_{n+1} = f_a(z_n)$$

Calculer z_n en fonction de a, n, z .

Partie B

Le plan affine euclidien \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Pour tout réel a , soit F_a l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f_a(z)$. Montrer que F_a est définie analytiquement dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par

$$\begin{cases} x' = e^a(x - 2ay) \\ y' = e^a y. \end{cases}$$

Quel est l'ensemble des points invariants par F_a ?

2. Montrer que pour tout couple (a, a') de réels $F_a \circ F_{a'} = F_{a+a'}$.
Montrer que F_a est bijective. Définir F_a^{-1} , l'application réciproque de F_a .
3. Soit (\mathcal{C}) l'ensemble dont une équation dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est

$$x^2 - 4axy + (8a^2 - 1)y^2 + 4ae^{-ax} - 8a^2e^{-a}y + (4a - 1)e^{-2a} = 0.$$

- a. Vérifier que (\mathcal{C}) n'est pas vide.
- b. Trouver une équation de l'image (\mathcal{C}') de (\mathcal{C}) par F_a . Préciser la nature de (\mathcal{C}') suivant les valeurs de a .

Partie C

Soit dans \mathcal{P} la relation binaire \mathcal{R} définie par

$$\forall (M, M') \in \mathcal{P}^2, \quad [M\mathcal{R}M' \iff \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } M' = F_a(M)]$$

1. Montrer en utilisant les résultats B 2. que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Quel que soit α réel, on note Δ_α la classe d'équivalence du point A de coordonnées $(\alpha; 0)$.
Montrer que, suivant les valeurs de α , Δ_α est soit un point, soit une demi-droite que l'on précisera.

3. Quel que soit β réel on note Γ_β la classe d'équivalence du point B de coordonnées $(0; \beta)$.

Pour $\beta \neq 0$ trouver une équation de Γ_β dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que quel que soit β , Γ_β est globalement invariante par toute application F_a .

Partie D

β étant un paramètre réel strictement positif, on définit l'application g_β de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} par

$$\begin{cases} g_\beta(x) = -2x \operatorname{Log} \frac{x}{\beta} & \text{si } x > 0, \\ g_\beta(0) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier g_β et représenter graphiquement g_β dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, e désignant le nombre réel dont le logarithme népérien est égal à 1.
2. En déduire la représentation Γ_e , classe d'équivalence du point B de coordonnées $(0; e)$, définie dans la question C 3.