Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau septembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre boules noires.
On prélève simultanément quatre boules dans l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1. Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore.
2. **a.** Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore composé de boules rouges et blanches ?

   b. Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est $\dfrac{68}{165}$.
3. Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement tricolore.
4. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On désigne par E l'ensemble des points M d'affixe z tels que z^3 soit un nombre réel positif ou nul.

1. **a.** Le point A d'affixe $a = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ appartient-il à E ?

   b. On note B le point d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$.
   Calculer un argument de b et montrer que B appartient à E.
2. On suppose $z \neq 0$ et on note θ un argument de z. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z^3 soit un nombre réel positif.
3. Après avoir vérifié que le point O appartient à E, déduire des résultats précédents que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera. Placer les points A et B et représenter E sur une figure.
4. À tout point P d'affixe $z \neq 0$, on associe les points Q d'affixe iz et R d'affixe z^4.
   On note F l'ensemble des points P tels que l'angle $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR})$ ait pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
   Montrer que F est l'ensemble E privé du point O.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2i, $-1+4\text{i}$ et $5+2\text{i}$.

   On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie S d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ$ S.

   On désigne par A′ et B′ les images respectives de A et B par f. Calculer les affixes de A′ et B′ et placer les points A, B, C, A′ et B′ sur une figure.

2. On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes et $|a| = 1$.

   À tout point M d'affixe z, f associe le point M' d'affixe z'.

   Justifier que f est un antidéplacement et démontrer que :

$$z' = \frac{-3-4\text{i}}{5}\overline{z} + \frac{38-6\text{i}}{5}.$$

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. La transformation f est-elle une symétrie ?

4. On appelle D le point d'affixe 3 + 6i, Δ la médiatrice de [BD] et S′ la symétrie d'axe Δ.

   a. Montrer que les droites Δ et (AB) sont parallèles. Déterminer S $\circ$ S′.

   b. Montrer que $f \circ$ S′ est la translation, notée t', de vecteur $\overrightarrow{DC}$. En déduire que $f = t' \circ$ S′.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Ce problème comporte trois parties **A, B** et **C**. Les parties **B** et **C** sont indépendantes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, unité graphique : 4 cm).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \text{e}^{-x}\right).$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = -x + \ln\left(1 + \text{e}^{x}\right)$.

   En déduire que la courbe Γ admet, en $-\infty$, une asymptote, notée (Δ).
4. Tracer (Δ) et Γ.

Partie B

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\text{e}^{x}}$.
2. On note A, B et C les points de Γ d'abscisses respectives 0, 1 et -1.

   On appelle T_0, T_1 et T_{-1} les tangentes respectives à la courbe Γ aux points A, B et C.

   a. Démontrer que la droite (BC) est parallèle à la droite T_0.

b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de T_1 et T_{-1}.

Partie C

1. Soient u et v les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(t) = \ln(1+t) - t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2.$$

Étudier les variations de u et v. En déduire que, pour tout nombre réel t positif, on a :

$$t - \frac{1}{2}t^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

2. Soit n un entier naturel ($n \geqslant 1$). On considère le nombre
$S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

a. Démontrer que :

$$\frac{1-\text{e}^{-n}}{\text{e}-1} - \frac{1}{2}.\frac{1-\text{e}^{-2n}}{\text{e}^2-1} \leqslant S_n \leqslant \frac{1-\text{e}^{-n}}{\text{e}-1}.$$

b. On admet que la suite (S_n) a une limite réelle ℓ.
Montrer que $\left|\ell - \dfrac{1}{\text{e}-1}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\left(\text{e}^2-1\right)}$.