∽ Baccalauréat A1 Sportifs de haut-niveau ∽ septembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $]-2~;~+\infty[$ par

$$f~:~x \longmapsto \frac{5-x^2}{(x+2)^2}.$$

1. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout $x \in]-2~;~+\infty[$,

$$f(x) = a + \frac{b}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est d'étudier l'équation :

$$(E)~:~(\ln x)^2 - 2\ln x + 2 - x = 0, \quad \text{où } x > 0$$

en utilisant une méthode d'approximation.
À cet effet, on considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2.$$

On note C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A

Étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée f' de f.
3. Étudier le signe de $\ln x - 1$. En déduire le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe C en précisant la tangente T au point A d'abscisse 1.

Partie B

Étude de l'équation (*E*)

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

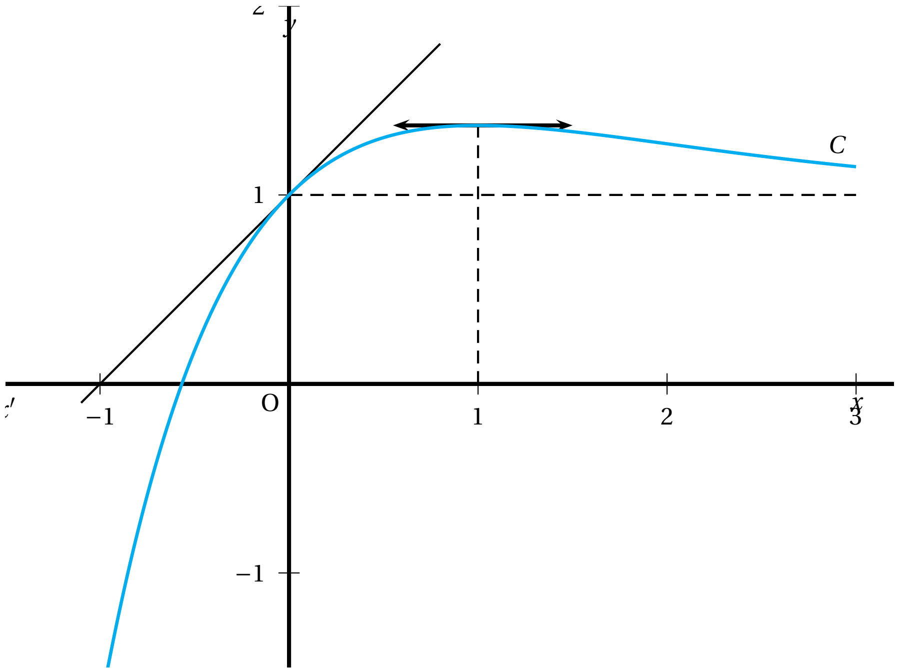
L'équation (E) est donc équivalente à l'équation $g(x) = 0$.

1. Étude graphique
   Tracer la droite D d'équation $y = x$. En déduire graphiquement que l'équation (E) a une solution α telle que $1 < \alpha < \text{e}$.
2. Étude de g sur $[1~;~\text{e}]$
   Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
   En utilisant A - 3, montrer que $g'(x) < 0$ sur $[1~;~\text{e}]$.

3. Existence et approximation de α
   Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
   Établir que $1,42 < \alpha < 1,43$.

PROBLÈME **10 points**

La courbe C représentée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + bx\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.
La droite T est la tangente à la courbe C au point d'abscisse zéro.



Reproduire l'allure de la courbe C sur la copie (repère orthonormal : unité graphique : 2 cm).

1. Lecture graphique.
   a. Lire sur le graphique proposé ci-dessus $f(0)$ et $f'(0)$.
   b. En déduire la valeur de a et celle de b.
   Dans toute la suite, on prend $f(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x}$.
2. Variations de f
   a. Calculer la dérivée f' de f.
      Déterminer la tangente à C au point d'abscisse 1.
   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   c. Déterminer la limite de f en $+\infty$; interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   d. Dresser le tableau de variations de f.
3. Étude du point d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
   a. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule telle que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.
   b. On pose $\alpha' = -0,56$. Calculer $f(\alpha')$ à la précision 10^{-4}.
      Prouver que $\alpha < \alpha'$ et que $\alpha' - \alpha < 10^{-2}$ (on pourra calculer $f(-0,57)$.