

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Sportifs de haut-niveau ∞  
septembre 1990

EXERCICE 1

points

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_1 &= 1 \text{ et} \\ u_{n+1} &= 7u_n + 8u_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $s_n = u_{n+1} + u_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

En déduire  $s_n$  en fonction de  $n$ .

2. On pose  $v_n = (-1)^n u_n$  et on considère la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$t_n = v_{n+1} - v_n.$$

Exprimer  $t_n$  en fonction de  $s_n$ .

3. Exprimer  $v_n$ , puis  $u_n$ , en fonction de  $n$  (on pourra calculer, de deux manières, la somme  $t_0 + \dots + t_{n-1}$ ).

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{8^n}$ .

EXERCICE 2

points

$n$  désigne un entier strictement positif fixé.

On se propose de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt.$$

Pour ceci on commence par étudier le signe de  $\sin(nt)$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$

1. Soit un entier  $k \geq 0$  et soit l'intervalle  $J_k = \left[ k \frac{\pi}{n}; (k+1) \frac{\pi}{n} \right]$  :
- $t$  désignant un élément de  $J_k$ , donner un encadrement du réel  $nt$ .
  - En déduire que  $\sin(nt)$  garde un signe constant lorsque  $t$  décrit  $J_k$ .  
Préciser ce signe lorsque  $k = 2\ell$  ( $\ell \in \mathbb{N}$ ), puis lorsque  $k = 2\ell + 1$  ( $\ell \in \mathbb{N}$ ).
  - Calculer  $\int_{\frac{k\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)| dt$ .
2. Calculer l'intégrale  $I = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt$ .  
(On pourra utiliser 1. c. et la relation de Chasles sur les intégrales.)

PROBLÈME

points

Le plan est rapporté à un repère direct  $\mathcal{R} = (\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$ .

On note  $x$  et  $y$  les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$x(t) = e^t \cos t \quad \text{et} \quad y(t) = e^t \sin t.$$

Pour tout réel  $t$ , on note  $M(t)$  le point de coordonnées  $(x(t); y(t))$  et on note  $\overrightarrow{v(t)}$  le vecteur de composantes  $(x'(t); y'(t))$ .

L'objectif du problème est l'étude de quelques propriétés géométriques de la courbe  $\Gamma$  décrite par le point  $M(t)$ .

### 1. Étude de la tangente en un point

- a. Étant donné un réel  $t$ , montrer que  $M(t)$  est différent de O, et calculer les affixes  $Z(t)$  et  $W(t)$  des vecteurs  $\overrightarrow{OM(t)}$  et  $\overrightarrow{v(t)}$  respectivement.

Montrer que le nombre complexe  $U = \frac{W(t)}{Z(t)}$  est indépendant de  $t$ .

Déterminer le module et un argument de  $U$ .

- b. Étant donné un réel  $t$ , on note  $B(t)$  le point défini par  $\overrightarrow{M(t)B(t)} = \overrightarrow{v(t)}$ .

- c. Dédurre de ce qui précède une mesure de l'angle  $\left(\overrightarrow{OM(t)}, \overrightarrow{M(t)B(t)}\right)$ .

Montrer que la tangente en  $M(t)$  à  $\Gamma$  est l'image de la droite  $(OM(t))$  par la rotation de centre  $M(t)$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

### 2. Intersection de $\Gamma$ avec les cercles de centre O, et construction point par point

- a. Pour tout réel  $t$ , calculer la norme du vecteur  $\overrightarrow{OM(t)}$ .

- b. Étant donné un réel  $R > 0$ , montrer que  $\Gamma$  a un unique point d'intersection avec le cercle  $\mathcal{C}_R$  de centre O et de rayon  $R$  et calculer, en fonction de  $R$ , les coordonnées de ce point d'intersection.

- c. Calculer, avec deux décimales exactes, les coordonnées des points d'intersection de  $\Gamma$  avec les cercles  $\mathcal{C}_R$  lorsque  $R$  prend les quinze valeurs suivantes :

0,05; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5.

Construire ces points sur une figure en prenant l'unité de longueur égale à 2 cm.

Sur cette même figure, construire les tangentes à  $\Gamma$  en les cinq points correspondant à  $R = 1; 2; 3; 4; 5$ . Achever, sans justification, la construction de  $\Gamma$ .

### 3. Similitudes directes de centre O qui conservent $\Gamma$

- a. Soit  $s$  une similitude directe de centre O d'angle  $\theta$  et de rapport  $\lambda$ .

On suppose que  $s(M(0))$  appartient à  $\Gamma$ , et on écrit  $s(M(0)) = M(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

Montrer que  $\lambda = e^t$  et  $e^{i\theta} = e^{it}$ .

En déduire qu'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $\lambda = e^{\theta+2k\pi}$ .

- b. Étant donné un réel  $\theta$  et un entier relatif  $k$ , on note  $S_{\theta, k}$  la similitude directe de centre O, d'angle  $\theta$  et de rapport  $e^{\theta+2k\pi}$ .

i. Donner l'écriture complexe de  $S_{\theta, k}$ .

ii. Montrer que, pour tout réel  $t$ , il existe un réel  $t'$  qu'on précisera, tel que  $S_{\theta, k}(M(t)) = M(t')$ .

iii. Quelle est l'image de  $\Gamma$  par  $S_{\theta, k}$ ?

- c. Déterminer toutes les similitudes directes de centre O qui conservent  $\Gamma$ .

- d. Déterminer les rapports de toutes les homothéties de centre O qui conservent  $\Gamma$ .