Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C Sportifs de haut-niveau ∾ septembre 1991

EXERCICE 1 **4 points**

Le but de cet exercice est de montrer l'alignement de certains points d'une figure géométrique.

Soit A et B deux points du plan, O le milieu du segment [AB], et (C_1) l'un des deux demi-cercles de diamètre [AB].
La médiatrice de [AB] coupe (C_1) en I.
Soit (C_2) le cercle de centre 1 et de rayon IA. La demi-droite issue de O et passant par I coupe (C_2) en D. La droite (DB) recoupe (C_1) en K.

1. **a.** Faire une figure sur la copie et comparer les angles $\widehat{\text{AIB}}$ et $\widehat{\text{ADB}}$.
   b. Montrer que le triangle DKA est isocèle, en précisant la mesure de ses angles.
2. Soit J le milieu du segment [AD].
   Montrer que les points K, I et J sont alignés.
3. Soit s la similitude de centre A qui transforme O en I.
   On appelle L le point dont l'image par s est J. Déterminer L.
4. Montrer que les points O, I et J sont alignés.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
Soit f l'application du plan privé du point O dans le plan, qui, au point M d'affixe $z = r\text{e}^{\text{i}\theta}$ $(r > 0)$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z - \frac{1}{z}.$$

1. Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction de r et θ.
2. **a.** Montrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre O et de rayon 2, M' décrit une ellipse (E).
   b. Déterminer les sommets et les foyers de (E).
   c. Représenter (E) avec ses foyers sur la copie.

PROBLÈME **12 points**

Soit f la fonction définie pour tout x réel par :

$$f(x) = 2x^2\text{e}^{\frac{x}{2}}.$$

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est le centimètre.

Partie A
Tracé de (C) et calcul d'aire

1. **a.** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Construire le tableau de variations de f.
   c. Sur la feuille de papier millimétré, tracer avec soin la courbe (C) pour $-10 \leqslant x \leqslant 2$.
2. Déterminer l'aire, en cm^2, du domaine plan, ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{lllll} -10 & \leqslant & x & \leqslant & 0\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x). \end{array}\right.$$

(On pourra faire deux intégrations par parties successives.) On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B
Recherche de la solution positive de l'équation $f(x) = 2$

1. Montrer que l'équation (E) :

$$f(x) = 2$$

admet trois solutions, dont une seule, notée α, est positive. Justifier que
$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

2. On pose $g(x) = \text{e}^{-\frac{x}{4}}$.
   a. Montrer que pour x positif l'équation (E) est équivalente à l'équation :

$$x = g(x).$$

   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $\text{I} = [0\,;\,1]$, $g(x)$ appartient aussi à I.
   c. Démontrer que pour tout x de I, $(g(x) - \alpha)$ et $(x - \alpha)$ sont de signes contraires.
   d. On désigne par g' la dérivée de g. Montrer que pour tout x appartenant à I :

$$\left|g'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à I.
   b. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à g, prouver que pour tout n on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

   c. Conclure, quant à la convergence de (u_n).
4. On se propose de calculer une valeur approchée de α.
   a. Déterminer un entier p pour lequel u_p est une approximation de α à 10^{-3} près. Calculer la valeur correspondante u_p.
   b. Le nombre u_p est-il inférieur ou supérieur à α ? On pourra utiliser la question 2. c. pour justifier la réponse.