Baccalauréat ES Sportifs de haut-niveau septembre 1997

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Une salle de spectacle peut contenir 400 places. Le tableau suivant donne le nombre moyen de spectateurs enregistrés sur une large période, en fonction du prix d'une place.
p est le prix d'une place.
n est le nombre moyen de spectateurs.

p	5	10	15	20	25	30	35	40	45
n	362	323	275	248	198	162	117	88	34

1. Dans cette partie, les résultats doivent être arrondis au millième près et le détail des calculs n'est pas demandé.
   a. Donner le coefficient de corrélation linéaire r de cette série statistique à deux variables p et n.
   b. écrire une équation de la droite de régression linéaire de n en p.
2. Dans cette partie, on pose $n = -8p + 400$.
   a. Exprimer la recette pour un spectacle en fonction de p.
   b. Les frais fixes pour un spectacle s'élèvent à 3 200 F, exprimer le bénéfice pour un spectacle en fonction de p.
   c. Dans quel intervalle le directeur doit-il fixer le prix des places pour amortir au moins les frais fixes ?
   d. Quel prix doit-il fixer pour obtenir le bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Un restaurateur propose trois types de menu : le premier à 150 F, le deuxième à 90 F et le troisième à 70 F. Il constate que 30 % de ses clients prennent le menu à 150 F et 50 % celui à 90 F.
De plus, parmi ceux qui prennent le menu à 150 F, 85 % donnent un pourboire au serveur ; parmi ceux qui prennent le menu à 90 F, 65 % donnent un pourboire au serveur et parmi ceux qui prennent le menu à 70 F, 25 % donnent un pourboire au serveur.
Pour un client, on désigne par :
A : l'évènement« prendre un menu à 150 F ».
B : l'évènement « prendre un menu à 90 F ».
C : l'évènement « prendre un menu à 70 F ».
S : l'évènement « donner un pourboire au serveur ».

1. À la sortie du restaurant, on interroge un client choisi au hasard. Calculer la probabilité :
   a. qu'il ait pris un menu à 70 F ;
   b. qu'il ait pris un menu à 90 F et qu'il ait donné un pourboire au serveur ;
   c. qu'il ait donné un pourboire au serveur ;
   d. qu'il ait pris un menu à 150 F sachant qu'il a donné un pourboire au serveur (le résultat de cette question sera donné sous forme exacte, puis sous forme décimale approchée à 10^{-2} près par défaut).
2. On suppose que, quand un pourboire est donné au serveur, son montant est 5 % du prix du menu. On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le montant en francs du pourboire donné au serveur par un client.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

b. Quelle somme le serveur peut-il espérer gagner, s'il sert 30 clients ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Dans une station de sport d'hiver, on a observé qu'un tiers des skieurs emprunte une télécabine les emmenant directement au sommet des pistes.
Les autres skieurs utilisent un télésiège qui les transporte dans un domaine intermédiaire.
Parmi ceux-ci, un quart emprunte un téléski pour se rendre au sommet des pistes, les autres skient dans ce domaine intermédiaire. Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On considère, dans cette station, une personne partant skier. Calculer la probabilité :
   a. que ce skieur aille au sommet des pistes en utilisant le télésiège, puis le téléski ;
   b. que ce skieur aille skier au sommet des pistes.
2. Au sommet des pistes, on interroge un skieur choisi au hasard. Prouver que la probabilité qu'il soit arrivé en télécabine est $\frac{2}{3}$.
3. Dans un moment de très grande affluence au sommet des pistes, on interroge au hasard quatre skieurs.
   a. Calculer la probabilité qu'au moins un d'entre eux ne soit pas venu en télécabine.
   b. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de skieurs venus en télécabine.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer son espérance $\mathrm{E}(X)$ et sa variance $V(X)$.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Le but de ce problème est de déterminer une approximation du prix d'équilibre d'un produit manufacturé. (On rappelle que le prix d'équilibre est le prix pour lequel l'offre est égale à la demande).
Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

Partie A : étude de la fonction d'offre

- x désigne le prix d'une unité de produit, exprimé en milliers de francs.
- $f(x)$ désigne la quantité offerte sur le marché, exprimée en milliers d'articles.

On admet que la fonction d'offre f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = x$. Déterminer la limite de $\varphi - f$ en $+\infty$.
   c. Soit D la droite d'équation $y = x$. Interpréter graphiquement le résultat de la question b.
2. étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

Partie B : étude de la fonction de demande

x désigne toujours le prix d'une unité, exprimé en milliers de francs.
$g(x)$ désigne la quantité demandée, exprimée en milliers d'articles.
On admet que la fonction de demande g définie sur $]0 ; +\infty[$ est de la forme

$$g(x) = \frac{a}{x} + b\ln x \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

1. On note Γ la courbe représentative de g dans $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Déterminer les nombres a et b sachant que Γ passe par le point A$(1\,;\,2)$ et admet en ce point une tangente Δ de coefficient directeur -3.

2. On pose dans toute la suite $g(x) = \dfrac{2}{x} - \ln x$.

a. étudier le sens de variation de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

c. Construire, sur l'annexe , la courbe Γ ainsi que sa tangente Δ en A.

Partie C : Détermination du prix d'équilibre

1. Méthode graphique

À l'aide des graphiques de $\mathscr{C}$ et de Γ, indiquer le prix d'équilibre (à 100 F près).

2. étude théorique

Soit la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

a. étudier le sens de variation de h.

b. Déterminer la limite de h en 0, puis en $+\infty$.

c. Prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $[1{,}73\,;\,1{,}74]$.

Déduire de ce qui précède un encadrement du prix d'équilibre à 10 F près.