Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau septembre 1997

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} u_0 & = & 0\\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n+1}{4}\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l c l} v_0 & = & 2\\ v_{n+1} & = & \dfrac{3v_n+1}{4}\end{array}\right.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part et v_1, v_2, v_3 d'autre part.
2. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 5 cm), tracer les droites D et Δ d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.
   Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses, les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3, ainsi que les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3.
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $sn = u_n + v_n$
   a. Calculer s_0, s_1, s_2, s_3. À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?
   b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (s_n) est une suite constante.
4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
   Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique.
   Donner l'expression de d_n en fonction de n.
5. En utilisant les résultats des questions 3. b. et 4. b., donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n.
6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent. Préciser leurs limites.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
On considère les points A et C d'affixes respectives a et c. On suppose que les points O, A, C ne sont pas alignés.
On note B le point image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et D le point image de C par la rotation de centre O et d' angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Dans cette question, on suppose que $a = 3 + \dfrac{1}{4}\text{i}$ et $c = \dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Placer sur une figure les points O, A, B, C, D (on justifiera la construction du point C).
   Dans les questions suivantes, on revient au cas général
   On suppose que les points B et C sont distincts.
2. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AD}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.
   Comparer les longueurs AD et BC et démontrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.
3. On désigne par I le milieu du segment [AC]. En utilisant les affixes de deux vecteurs que l'on précisera, démontrer que la médiane (OI) du triangle OAC est une hauteur du triangle ODB et que BD = 2OI.
4. La médiane issue de O dans le triangle ODB est-elle une hauteur du triangle OAC ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 POINTS**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère quatre points E, F, G, H non alignés, tels que EFGH soit un parallélogramme de centre O.
On désigne par A l'image de G par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
On désigne par B l'image de H par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
On note I le milieu du segment [GH].

1. Placer ces différents éléments sur une figure.
   L'objet de cet exercice est de démontrer que la médiane (OI) du triangle OGH est une hauteur du triangle OAB. À cet effet, on propose deux méthodes.

2. **Emploi des nombres complexes**

   On rapporte le plan complexe à un repère orthonormal direct d'origine O, tel que l'affixe du point G est égale à 1. On note z l'affixe du point H.
   Calculer les affixes des points I, A et B en fonction de z.
   Prouver que les points O et I sont distincts ainsi que les points A et B.
   Montrer que la droite (OI) est perpendiculaire à la droite (AB).

3. **Emploi de transformations**

   On désigne par h l'homothétie de centre G et de rapport 2.
   a. Déterminer les images par h des points O et I.
   b. Déterminer l'image par r' du point E.
   c. Conclure.

PROBLÈME **11 POINTS**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 5 cm).
Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$$

1. **a.** Calculer la dérivée g' de g.
   Montrer que pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}$.
   b. Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Déterminer la limite de g en 0.
4. **a.** Dresser le tableau des variations de g.

b. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

5. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.

B. Étude de la fonction f

1. Montrer que pour tout $x \in]0~;~+\infty[$, on a $f'(x) = g(x)$. En déduire les variations de f sur $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$.
(On pourra poser $h = \dfrac{1}{x^2}$).

b. En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

3. Étude de f en 0.

a. Déterminer la limite de f en 0. (On pourra écrire $f(x)$ sous la forme
$f(x) = x\ln(x^2+1) - 2x\ln x$ et on utilisera le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.)

b. Étudier la dérivabilité de f en 0. Préciser la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point 0.

4. Encadrement de $f(\alpha)$.

a. Prouver que, pour tout élément x de $[0,5~;~\alpha]$, $0 < f'(x) < f'(0,5)$.

b. En déduire que, pour tout élément x de $[0,5~;~\alpha]$, $0 < f(\alpha) - f(0,5) < (\alpha - 0,5)f'(0,5)$, puis que $0 < f(\alpha) - f(0,5) < \dfrac{1}{10}f'(0,5)$.

c. En déduire une valeur décimale approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

5. Dresser le tableau des variations de f. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

C. Calcul d'une aire

Soit λ, un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0~;~1]$.

1. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $J_\lambda = \displaystyle\int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

2. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 0} J_\lambda$.
On admet que cette limite est l'aire de la partie du plan constituée des points dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$
En déduire la valeur de cette aire exprimée en cm^2.