

🌀 Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau 🌀
septembre 1995

EXERCICE 1

4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(3 ; 2 ; -1)$ et $H(1 ; -1 ; 3)$.

1. Calculer la longueur AH.
2. Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH).
3. On donne les points : $B(-6 ; 1 ; 1)$, $C(4 ; -3 ; 3)$ et $D(-1 ; -5 ; -1)$.
 - a. Démontrer que les points B, C et D appartiennent au plan (P).
 - b. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{BC} \wedge \vec{BD}$.
 - c. Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
 - d. Démontrer que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\frac{145}{3}$.
4.
 - a. Calculer l'aire du triangle ABC.
 - b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

PROBLÈME

points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) &= \frac{3}{2} \\ f(x) &= 2x \ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

($\ln$ désigne le logarithme népérien). Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Première partie : Étude d'une fonction auxiliaire et de ses zéros

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 \ln x - x + 1.$$

1. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g .
Étudier les variations de g .
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ deux solutions 1 et α .
En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3. À l'aide de la calculatrice vérifier que :

$$3,5 \leq \alpha \leq 4.$$

Deuxième partie : Étude de f

1. Soit f' la fonction dérivée de f . Vérifier que $f' = g$. Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

- a. Montrer que f est continue en zéro.

- b. Calculer la limite de $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers zéro par valeur strictement positives.

Que peut-on en conclure?

2. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ deux solutions 1 et β .

- b. Justifier les inégalités : $5 \leq \beta \leq 6$.

3. La tangente (D) à la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 5 a pour équation $y = h(x)$.

- a. Calculer $h(x)$ et étudier les variations de la fonction Δ définie sur $]5 ; +\infty[$ par :

$$\Delta(x) = f(x) - h(x).$$

En déduire que pour $x \geq 5$ on a $f(x) \leq h(x)$.

- b. Soit γ l'abscisse du point d'intersection de (D) et de l'axe Ox . Calculer γ et prouver que $\beta \leq \gamma$.

4. Rassembler dans un tableau les résultats obtenus sur f .

Tracer la droite (D) et la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f dans un repère orthonormal d'unité 2 centimètres.