∽ Baccalauréat ES Sportifs de haut-niveau octobre 1998 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Neuf amis, cinq garçons et quatre filles, décident de tirer au sort deux conducteurs, qui devront rester sobres durant une soirée.
Chacun écrit son nom sur un carton glissé ensuite dans une boite. L'un d'entre eux extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartons de la boîte.
On définit les évènements G_1, G_2, F_1 et F_2 par :

G_1 « Un garçon est désigné au premier tirage » ;
G_2 « Un garçon est désigné au deuxième tirage » ;
F_1 « Une fille est désignée au premier tirage » ;
F_2 « Une fille est désignée au deuxième tirage ».

1. **a.** Calculer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au deuxième tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu sur le premier carton.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement $G_1 \cap F_2$.
   La comparer à celle de l'évènement $G_2 \cap F_1$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait deux conductrices en fin de soirée.
3. Calculer la probabilité que le sort désigne une fille au deuxième tirage.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm), la courbe $\mathscr{C}$, représentée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\text{I} = \left]0\,;\,\text{e}^{1,5}\right]$.
La fonction dérivée de f est notée f'.
Les variations de f sont données par le tableau suivant :

x	0		a		$\text{e}^{1,5}$
$f(x)$	‖	↗	1/4	↘	

On précise que :
- Les droites (Δ) et (D) sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ respectivement aux points A d'abscisse a et B d'abscisse 1.
- La droite (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses.
- L'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$.

I. Par lecture graphique, sans justification des résultats, donner :

1. Les valeurs suivantes : $f(\text{e}ø)$, $f(a)$, $f'(1)$, $f'(a)$.
2. La limite de f en 0.
3. Le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x, x étant dans l'intervalle I.
4. L'ensemble des solutions, sur l'intervalle I, de l'inéquation : $f'(x) \geqslant 0$.

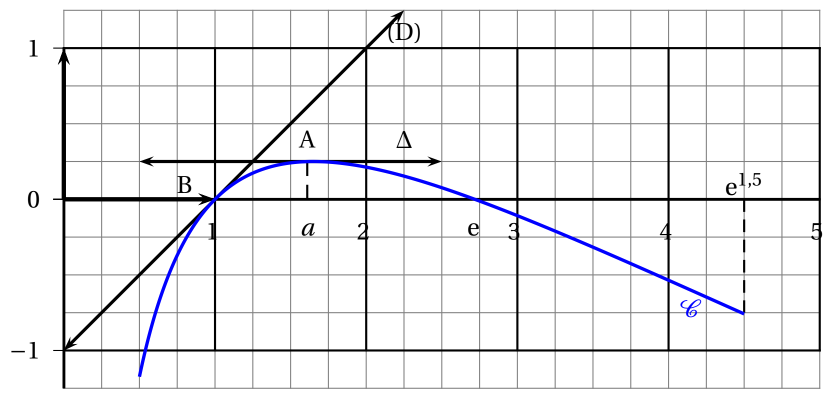
5. Une interprétation du nombre $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$ et trouver parmi les intervalles suivants celui auquel appartient ce nombre :

$$[0\,;\,0,2[,\ [0,2\,;\,0,4[,\ [0,4\,;\,0,6[,\ [0,6\,;\,1[,\ [1\,;\,2[.$$

II. La fonction f est définie sur = $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{1,5}\right]$ par :

$$f(x) = \ln x - (\ln x)^2.$$

1. Retrouver par le calcul le résultat trouvé en **I. 3.**.
2. Déterminer le nombre a, abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$.



EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Un salarié remarque qu'il lui reste, chaque mois, 2 000 F (francs français) de son salaire mensuel.
Il décide donc, en 1998, de réaliser une épargne « prudente » de la façon suivante :

• Le 28 de chaque mois, il verse 50 % du solde de son compte courant sur un plan d'épargne.
Le solde est nul le 28 décembre 1997.
• Le 28 janvier 1998, le solde de son compte courant est : $S_1 = 2\,000$ F ; il verse donc la somme $e_1 = 1\,000$ F sur son plan d'épargne et laisse 1 000 F sur son compte courant.
• Le 28 février 1998, le solde S_2 est égal à 3 000 F : c'est-à-dire 1 000 F restant, plus 2 000 F d'économies mensuelles. Il verse donc $e_2 = 1\,500$ F sur son plan d'épargne.

1. Calculer e_3 et e_4, versements respectifs de son compte courant à son plan d'épargne le 28 mars et le 28 avril.
2. On désigne par e_n le montant théorique du versement du compte courant au plan d'épargne le 28 du n^{e} mois qui suit le mois de décembre 1997.

   On a donc $e_{n+1} = \dfrac{1}{2}(e_n + 2000)$.

   Pour tout nombre entier naturel n non nul, on définit la suite (v_n) par $v_n = 2000 - e_n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_1 = 1\,000$.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

   c. Calculer $v_1 + v_2 + \ldots + v_{12}$.
3. **a.** Exprimer e_n en fonction de n.

   b. Trouver le montant de la somme capitalisée sur le plan d'épargne au 29 décembre 1998.

PROBLÈME **11 points**

On considère un produit dont le prix unitaire est x (en milliers de francs français).
D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ (en milliers d'objets) de ce produit sont définies, pour tout x positif ou nul, par les formules :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,5x} - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{8}{\mathrm{e}^{0,5x} + 1}.$$

Partie A

1. **a.** Déterminer $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **a.** Déterminer $g(0)$ et la limite de g en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (on prendra pour unité graphique 4 cm).
   Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g après avoir déterminé et tracé les tangentes respectives à ces deux courbes aux points d'abscisse 0.

Partie B

L'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique p dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Par lecture graphique, donner une approximation à $0,1$ près de p et du nombre $n = f(p)$ (on fera apparaître les tracés permettant cette lecture).

2. **a.** Calculer p et n.
   b. Le nombre p est appelé « prix d'équilibre » du produit. Donner le prix d'équilibre, exprimé en francs, arrondi au franc près, ainsi que le nombre correspondant d'objets proposés sur le marché.

Partie C

On considère les nombres $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 9} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \mathrm{I} - np$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.
   En déduire une interprétation géométrique de J (on pourra utiliser des hachures de couleurs différentes).
2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = x - 2\ln\left(\mathrm{e}^{0,5x} + 1\right).$$

   a. Déterminer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h.
   b. En déduire que I égale $8\ln 9 - 8\ln 4$.
   c. En économie, on considère que J exprime, en millions de francs, la « rente » des consommateurs.
   Déterminer, au millier de francs près, une estimation de la « rente » des consommateurs.