Baccalauréat ES Sportifs de haut-niveau septembre 1996

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

On a mesuré entre 1989 et 19941 l'effet de la pollution sur la population piscicole d'une rivière.
Les résultats présentés dans le tableau suivant donnent une estimation du nombre y_i de poissons, exprimé en milliers, correspondant à l'année dont le rang est x_i.

Année	1989	1990	1991	1992	1993	1994
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	951,3	106,7	96,5	63,2	21	9,4

1. On considère la série statistique double $(x ; y)$. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Expliquer pourquoi un ajustement linéaire ne paraît pas bien adapté.
2. On pose $z_i = \ln y_i$ pour $i \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
   a. Calculer les nombres z_i ; (on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut).
   b. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de la série $(x_i ; z_i)$.
   c. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Justifier l'utilisation d'un ajustement affine pour la série $(x_i ; z_i)$.
   d. Déterminer l'équation de la droite de régression de z en x. Tracer cette droite sur le graphique de la question b.
3. On suppose que l'évolution de cette population se poursuit sur le même modèle.
   a. À partir de quelle année cette population sera-t-elle strictement inférieure à 1 000 ?
   b. Donner une estimation de la population de cette rivière en l'an 2000 ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Une entreprise de bateaux propose chaque jour une croisière sur le Rhône. Les relevés météorologiques permettent d'affirmer que, dans la région, l'évènement, noté B, « le temps est au beau fixe » se réalise 180 jours par an ; l'évènement, noté N, « le temps est nuageux sans pluie » se réalise 120 jours par an ; l'évènement, noté P, « le temps est pluvieux » se réalise 65 jours par an. On suppose qu'une année compte 365 jours.
On note $p_F(E)$ la probabilité d'un évènement E sachant qu'un évènement F est réalisé. [Cette probabilité se note aussi $p(E/F)$].
On donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.
Un jour est choisi au hasard.

1. Calculer les probabilités $p(B), p(N), p(P)$ pour que, ce jour-là, le temps soit respectivement beau, nuageux sans pluie, pluvieux.
2. Soit V le nombre de billets vendus ce jour-là.
   On considère les évènements :

   $$A_1 : « 0 \leqslant V \leqslant 15 » \quad A_2 : « 15 < V \leqslant 30 » \quad A_3 : « 30 < V \leqslant 50 »$$

   On dispose des renseignements suivants :

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
Probabilité de A_i sachant B	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
Probabilité de A_i sachant N	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
Probabilité de A_i sachant P	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exemple de lecture : la probabilité pour que « $15 < V \leqslant 30$ *sachant que* B *est réalisé* » *est égale à* $\dfrac{3}{8}$

Calculer $p\left(A_1 \cap B\right)$ puis $p\left(A_1\right)$.

De manière analogue, on trouverait $p\left(A_2\right) = \dfrac{206}{584}$ et $p\left(A_3\right) = \dfrac{229}{584}$, résultat que l'on admettra.

3. On considère que le bilan quotidien de l'entreprise est positif si elle a vendu au moins seize billets.

a. Calculer la probabilité pour que le bilan soit positif.

b. Si le bilan est positif, quelle est la probabilité pour que le temps ait été nuageux ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Une entreprise produit une pièce en grande série. Parmi les pièces produites, 5 % sont défectueuses.

1. Déterminer la probabilité pour qu'une pièce, prélevée au hasard dans le stock, soit défectueuse.

2. On prélève, au hasard, des échantillons de dix pièces dans le stock. Le nombre de pièces est suffisamment grand pour que la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse soit la même à chacun des dix prélèvements.

Déterminer la probabilité des évènements suivants :

a. « il y a exactement 3 pièces défectueuses dans un échantillon » ;

b. « il n'y a pas de pièce défectueuse dans un échantillon » ;

c. « il y a au moins une pièce défectueuse dans un échantillon ».

3. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses dans un échantillon de 10 pièces.

a. Donner l'ensemble des valeurs prises par X.

b. Soit k une de ces valeurs. Exprimer, en fonction de k, la probabilité pour qu'un échantillon contienne exactement k pièces défectueuses.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

Problème **11 points**

Partie A

On considère les fonctions g et h définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x \quad \text{et} \quad h(x) = x - \frac{1}{2}x^2.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ [unités graphiques 2 cm].
On note P la courbe représentative de h dans ce repère.

1. Étudier les variations de la fonction h.
2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente D à la courbe P au point d'abscisse 0 et préciser la position relative de P et de D.
3. Tracer sur une même figure la courbe P et la droite D.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère précédent.

1. **a.** Étudier les variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.
   b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   c. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. On se propose d'étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à D.
   Pour cela on considère la fonction φ définie sur $[0~;~+\infty[$ par

   $$\varphi(x) = x - \ln(1+x).$$

   a. Calculer la dérivée φ' de φ. En déduire le sens des variations de φ.
   b. Calculer $\varphi(0)$. Déterminer enfin le signe de φ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. On se propose d'étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à P.
   Pour cela on considère la fonction ψ, définie sur $[0~;~+\infty[$ par

   $$\psi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2.$$

   a. Calculer la dérivée ψ' de ψ. En déduire le sens des variation de ψ.
   b. Calculer $\psi(0)$. Déterminer enfin le signe de ψ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Placer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère précédent.
5. **a.** Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\,\text{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\,\text{d}x$.
   b. Soit A l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
   Montrer que : $\dfrac{1}{3} \leqslant A \leqslant \dfrac{1}{2}$.
6. Parmi les fonctions k définies sur $[0~;~+\infty[$, vérifiant, pour tout x positif,
   $h(x) \leqslant k(x) \leqslant g(x)$, peut-on trouver une fonction strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$? Justifier la réponse.