

Durée : 4 heures

∞ **Baccalauréat C Sportifs de haut-niveau** ∞
septembre 1993

EXERCICE 1

4 points

Enseignement de spécialité

Soit $p > 0$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on note F le point de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}p\right)$ et (D) la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}p$.

On note (P) la parabole de foyer F et de directrice (D).

1. Donner une équation cartésienne de la parabole (P).
2. Soit M un point de (P). On note a et b ses coordonnées et H sa projection orthogonale sur (D).

Montrer que le cercle de centre M passant par F est tangent en H à la directrice (D).

Donner une équation de la tangente en M à (P) ainsi qu'une équation de la médiatrice du segment [FH].

En déduire que ces deux droites sont confondues.

3. Application

On considère dans le plan une droite (Δ), un point F de (Δ) et un point N n'appartenant pas à (Δ).

Montrer qu'il existe deux paraboles (P) et (P') et deux seulement, de foyer F et d'axe (Δ) qui passent par N. On positionnera sur un dessin leur directrice (D) et (D') par rapport à la droite (Δ) et au cercle de centre N passant par F.

Donner la position relative des tangentes en N à (P) et à (P').

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

On considère la suite I définie par :

$$I_0 = \int_0^1 e^x dx$$

et pour tout entier $n \geq 1$ par

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx.$$

1. a. Calculer $\int_0^1 (1-x)^n dx$.
- b. À l'aide de l'encadrement $1 \leq e^x \leq e$ valable sur l'intervalle [0; 1]. montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

- c. Montrer que la suite I est convergente et déterminer sa limite.
2. a. Calculer I_0 , puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
- b. Établir, en intégrant par parties, que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n!}. \quad (1)$$

3. On pose pour tout entier $n \geq 1$:

$$J_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

- En utilisant les relations (1) exprimer J_n à l'aide de I_0 et I_n .
- En déduire la limite J de la suite (J_n) .
- Justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq J - J_n \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté on considère un cercle (C) de centre O et de rayon 1,5 et un cercle (C') de centre O' et de rayon 3. On suppose de plus que la distance de O à O' est égale à 6. Faire une figure (unité graphique : 1 cm).

- On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MO'}{MO} = 2$.
 - Montrer que si I est le centre d'une similitude directe qui transforme (C) en (C') alors I est un point de (Γ) .
 - Montrer que (Γ) coupe la droite (OO') en deux points A et B que l'on caractérisera comme barycentres des points O et O' .
 - Montrer que M est élément de (Γ) si et seulement si $MA \cdot ME = O$. Déterminer (Γ) et le représenter sur la figure.
- On veut prouver l'existence et l'unicité d'une similitude directe f d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme (C) en (C') .
 - Dans cette question on admet l'existence de f .
Quelle est alors l'image de O par f et quel est le rapport de f ?
Soit T le point d'intersection de (C) avec le segment $[OO']$.
Déterminer l'image T' de T par f .
 - En déduire l'existence et l'unicité de f ; construire le centre de f (on expliquera la construction).

PROBLÈME

11 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = 2x \ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \quad \text{pour } x > 0$$

(\ln désigne le logarithme népérien).

L'objet du problème est l'étude de f et l'encadrement d'une aire.

Partie I Étude d'une fonction auxiliaire et de ses zéros

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 \ln x - x + 1.$$

- Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g .
Étudier les variations de g .

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0; +\infty[$ deux solutions 1 et α .
En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. À l'aide de la calculatrice vérifier que :

$$3,5 \leq \alpha \leq 4.$$

Partie II Étude de f

1. Soit f' la fonction dérivée de f . Vérifier que $f' = g$ (pour $x > 0$).
Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - a. Montrer que f est continue en zéro.
 - b. Calculer la limite de $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers zéro par valeurs strictement positives. Que peut-on en conclure ?
3.
 - a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0; +\infty[$ deux solutions 1 et β .
 - b. Justifier les inégalités : $5 \leq \beta \leq 6$.
4. La tangente (D) à la courbe (\mathcal{C}) représentative de f au point d'abscisse 5 à pour équation $y = h(x)$.
 - a. Calculer $h(x)$ et étudier les variations de la fonction Δ définie sur $]5; +\infty[$ par :

$$\Delta(x) = f(x) - h(x).$$

En déduire que pour $x \geq 5$ on a $f(x) \leq h(x)$.

- b. Soit γ l'abscisse du point d'intersection de (D) et de l'axe Ox .
Calculer γ et prouver que $\beta \leq \gamma$.
5. Rassembler dans un tableau les résultats obtenus sur f . Tracer la droite (D) et la courbe (\mathcal{C}) représentative de f dans un repère orthonormal d'unité 2 centimètres.

Partie III Un encadrement

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = x^2 \ln x - \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}.$$

1. Vérifier que F est sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la primitive de f qui s'annule au point 1.
2. On pose $A = \int_1^\beta f(x) dx$.
 - a. Montrer que : $F(5) \leq A$. (1)
 - b. Montrer que :

$$A \leq F(5) + \int_5^\beta h(t) dt.$$

Prouver que : $\int_\beta^\gamma h(t) dt \geq 0$.

En déduire l'inégalité :

$$A \leq F(5) + \int_5^\gamma h(t) dt. \quad (2)$$

- c. Donner une interprétation géométrique des inégalités (1) et (2).
3. Donner un encadrement de A à 10^{-2} près.