Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau ∽
septembre 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement de spécialité

1. On considère dans le plan un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R.
   Soit M un point du plan et (D) une droite passant par M, et coupant le cercle $\mathscr{C}$ en deux points A et B.
   Soit A' le symétrique de A par rapport à O.
   Établir que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$, et en déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = M\text{O}^2 - R^2$.
2. Soit $EFGH$ un quadrilatère inscrit dans un cercle, et dont les diagonales (EG) et (FH) se coupent en un point I.
   Démontrer la relation :
   $$\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{IH}.$$
3. Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles de centres O_1 et O_2 distincts, de rayons R_1 et R_2. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que
   $$M\text{O}_1^2 - R_1^2 = M\text{O}_2^2 - R_2^2.$$
   Représenter $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et E pour $R_1 = 3$ cm, $R_2 = 2$ cm et $\text{O}_1\text{O}_2 = 6$ cm.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On désigne par s l'application qui à tout point M de $\mathscr{P}$, de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'~;~y')$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x' &=& -x-y+2\\ y' &=& x-y-1.\end{array}\right.$$

1. Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.
2. Démontrer que s est une similitude plane directe. Préciser son angle, son rapport et son centre I.
3. Soit g l'application qui à tout point M de $\mathscr{P}$ associe l'isobarycentre G des points M, $M' = s(M)$ et $M'' = s(M')$.
   a. Calculer, en fonction de l'affixe z de M, les affixes des points M'' et G.
   b. Démontrer que g est une similitude plane directe. Quel est son centre ?
   c. Déterminer l'affixe du point M_0 tel que $g\left(M_0\right))$ soit le point O.
   Reporter sur une figure les points M_0, M_0', M_0'' correspondants, ainsi que le point I, centre de la similitude s.

EXERCICE 2 **4 points**

Des enquêtes concernant les véhicules circulant en France ont été effectuées. Elles ont montré que :

- 12 % des véhicules ont des freins défectueux;
- parmi les véhicules ayant des freins défectueux, 20 % ont un éclairage défectueux;
- parmi les véhicules ayant de bons freins, 8 % ont un éclairage défectueux.

Dans l'espoir d'améliorer la sécurité routière, la gendarmerie effectue, au hasard, des contrôles de véhicules.
On appelle E l'évènement : « le véhicule contrôlé a un bon éclairage » et $\overline{E}$ son contraire, F l'évènement : « le véhicule contrôlé a de bons freins » et $\overline{F}$ son contraire.
On donnera, pour chaque résultat, l'approximation décimale par défaut à 10^{-4} près.

1. Donner les probabilités de F, de $\overline{E}$ sachant que $\overline{F}$ est réalisé, puis de $\overline{E}$ sachant que F est réalisé.
2. **a.** Calculer la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait des freins défectueux et un éclairage défectueux.

   b. Calculer la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait de bons freins et un éclairage défectueux.

   c. En déduire la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait un éclairage défectueux.
3. Sachant qu'un véhicule contrôlé a un éclairage défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il ait des freins défectueux?
4. **a.** Montrer que la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé soit en bon état (c'est-à-dire ait de bons freins et un bon éclairage) est 0,809 6.

   b. Au cours d'un contrôle, les gendarmes ont arrêté 20 véhicules. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait, parmi ces véhicules, au moins un véhicule qui ne soit pas en bon état?

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0~;~2\pi]$. On considère la suite géométrique u de premier terme $u_0 = \cos\alpha$ et de raison $\sin\alpha$.

1. Exprimer u_n en fonction de n, et déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Soit la suite s de terme général $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Exprimer s_n en fonction de n et déterminer la limite de s_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'unité 4 cm.

1. Tracer, sans justification, la courbe C_0 représentative de la fonction S_0 définie sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}~;~2\pi\right]$ par $S_0(x) = \cos x$.
2. Soit S_1 la fonction définie sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}~;~2\pi\right]$ par

   $$S_1(x) = \cos x + \cos x \sin x.$$

   Calculer la dérivée de S_1 et exprimer $S_1'(x)$ comme fonction de $\sin x$.

   En déduire le signe de $S_1'(x)$ et les variations de S_1 sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}~;~2\pi\right]$.

3. Soit S la fonction définie sur $\left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ par

$$S(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}.$$

Calculer la dérivée de S ; en déduire les variations de S sur $\left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$.

4. Démontrer pour $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ les inégalités

$$S_1(x) \leqslant S(x) \leqslant S_0(x).$$

Tracer les courbes représentatives C_1 de la fonction S_1 et C de la fonction S.

Partie C

Pour tout nombre entier naturel n, on considère la fonction S_n définie sur $[0\ ;\ 2\pi]$ par

$$S_n(x) = \cos x\left(1+\sin x+\cdots+\sin^n x\right),$$

et on pose

$$I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0, I_1 ainsi que $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x)\,\mathrm{d}x$.
Vérifier que $I_1 \leqslant I \leqslant I_0$.
Comment les inégalités peuvent-elles être illustrées graphiquement ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a (-I)n+ 1

$$I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

En déduire que $I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

3. Soit les suites A et B de termes généraux $A_n = I_{2n}$ et $B_n = I_{2n+1}$. Démontrer que :

a. la suite A est décroissante et la suite B est croissante ;

b. la suite de terme général $A_n - B_n$ converge vers 0.

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x appartenant à $\left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ on a :
$S(x) - S_n(x) = (\sin x)^{n+1} S(x)$, puis que :

$$S_{2n+1}(x) \leqslant S(x) \leqslant S_{2n}(x).$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$B_n \leqslant I \leqslant A_n.$$

Démontrer que A et B convergent vers I.