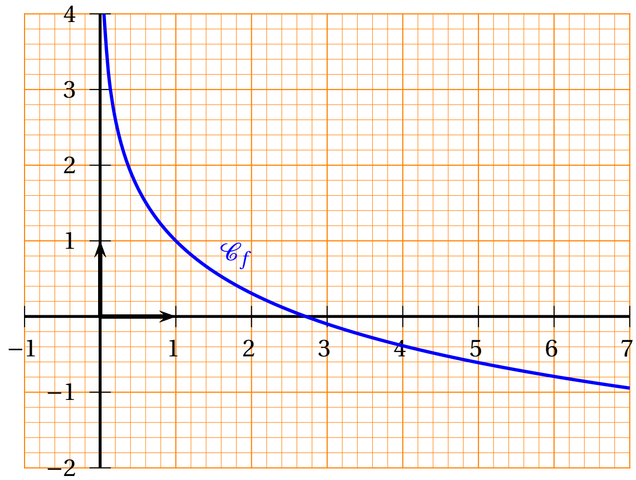
∽ Baccalauréat ES Sportifs de haut–niveau octobre 1999 ∽

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le repère utilisé est orthonormal : unité 1 cm.

La figure ci-dessous est la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 1 - \ln x$.



L'une des deux fonctions représentées ci-dessous a pour fonction dérivée la fonction f dont la représentation graphique est $\mathscr{C}_f$.

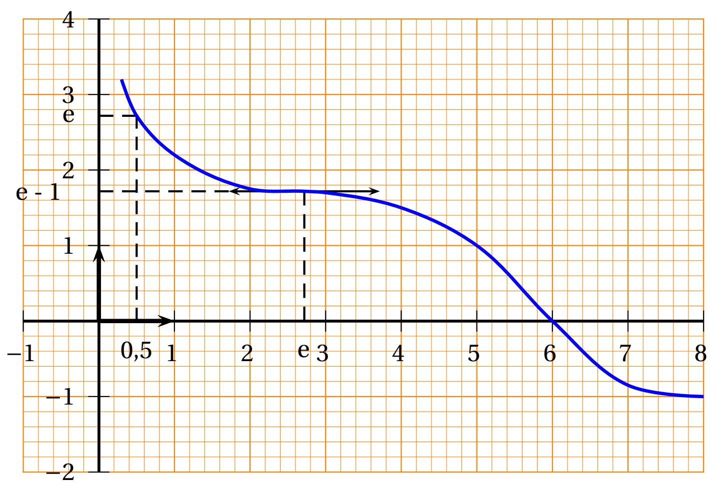


Figure 1

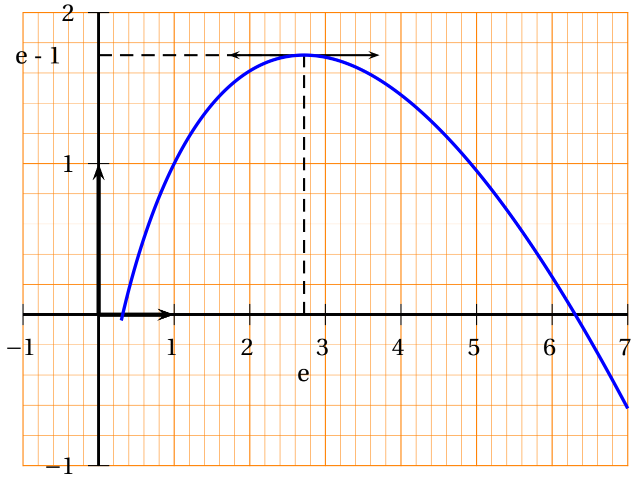


Figure 2

1. Justifier que la courbe représentée sur la figure 1 ne peut convenir.

   On note F la fonction dont la courbe représentative est tracée figure 2. Que représente la fonction F pour f ?

2. **a.** Déterminer par lecture graphique $F(\text{e})$ et $F(1)$.

   b. En déduire l'aire en cm^2 de l'ensemble E des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que : $1 \leqslant x \leqslant \text{e}$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

3. Montrer que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 1 passe par l'origine.

4. **a.** Vérifier que la fonction G définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$G(x) = -x + \ln x + 2x + k$$

   où k est un réel, a pour dérivée la fonction f.

   b. Déterminer le réel k pour que la courbe représentative de G soit celle de la figure 2.

EXERCICE 2 **4 points**
(obligatoire)

Un enquête faite auprès d'une population comprenant 51 % de femmes et 49 % d'hommes montre que 20 % des femmes et 15 % des hommes de cette population ne vont jamais au cinéma.

1. On choisit au hasard un individu de cette population. Tous les choix sont équiprobables. On note :

   F l'évènement : « l'individu choisi est une femme » ;

   C l'évènement : « l'individu choisi fréquente les salles de cinéma ».

   a. Déterminer la probabilité de l'évènement $F \cap C$.

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,175 5.

   c. Déterminer la probabilité que la personne choisie soit une femme, sachant qu'elle ne va jamais au cinéma. *(Le résultat sera arrondi à* 10^{-4} *près.)*

2. *Dans cette question les résultats seront arrondis à* 10^{-4} *près.*

   On choisit trois individus au hasard dans cette population.

   On suppose la population assez nombreuse pour pouvoir considérer que l'on répète alors trois fois de manière indépendante l'expérience « choisir au hasard un individu dans la population » dans des conditions identiques.

   a. Quelle est la probabilité qu'aucun des trois individus choisis ne fréquente les salles de cinéma ?

b. En déduire la probabilité que l'un au moins des individus choisis fréquente les salles de cinéma.

EXERCICE 2 **4 points**
(spécialité)

Dans un lycée de 810 élèves, les effectifs par niveau sont :
— 280 élèves en seconde ;
— 240 élèves en première ;
— 220 élèves en terminale ;
— 70 élèves en BTS.
On a décidé d'interroger chaque jour un groupe de 5 élèves choisis au hasard Pour connaître leur opinion concernant les menus à la cantine.

A - Pour une journée

Dans cette partie on ne demande aucun calcul approché.

1. Calculer la probabilité que les 5 élèves interrogés soient des élèves de seconde.
2. Calculer la probabilité que, parmi les 5 élèves interrogés, un, exactement, soit un élève de première.
3. Calculer la probabilité p pour qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

B - On répète l'opération pendant 6 jours de manière indépendante

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-5}*, près.*
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où au moins un élève de BTS est interrogé. Dans tous les calculs on prendra 0,364 3 comme valeur de la probabilité qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

1. Calculer la probabilité pour que l'évènement : « au moins un élève de BTS est interrogé » se produise 4 fois exactement au cours de ces 6 jours.
2. Calculer la probabilité pour que, au cours de ces 6 jours, aucun élève de BTS ne soit interrogé.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Dans cette partie, on pourra utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas exigé.
Une étude statistique portant sur la répartition des revenus d'une population a donné les résultats suivants : x représente un revenu annuel, exprimé en millions de francs, N représente le nombre, exprimé en milliers d'individus, dont le revenu est supérieur ou égal à x.

x_i en millions de F	0,35	0,6	0,9	1,5	2	3
N_i en milliers	4,448	1,359	0,557	0,181	0,148	0,039

1. **a.** Après l'avoir reproduit, compléter le tableau suivant, où z_i est l'arrondi à 10^{-2} près de $\ln(N_i)$.

x_i	0,35	0,6	0,9	1,5	2	3
z_i	1,49		$-0,59$		$-1,91$	

   b. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ z_i)$.
2. Donner une équation de la droite de régression de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-1} près.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1,6x+1,3}.$$

1. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal. On prendra 4 cm pour unité graphique.
   Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et tracer cette tangente.
3. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -xf'(x)$.
   a. Vérifier que $g(x) = 1,6x\mathrm{e}^{-1,6x+1,3}$.
   b. Montrer que la fonction G définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$G(x) = \left(-x - \frac{5}{8}\right)\mathrm{e}^{-1,6x+1,3}$$

   est une primitive de la fonction g.

Partie C

1. On admet que la fonction f définie dans la **partie B** est une bonne modélisation de la situation présentée dans la **partie A**, c'est-à-dire que : pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, le nombre, en milliers, d'individus de la population dont le revenu annuel est supérieur ou égal à x millions de francs est égal à $f(x)$.
   a. Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 2 millions de francs.
   b. Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 2 millions de francs et strictement inférieur à 2,5 millions de francs.
2. En économie, le nombre $\mathrm{R} = 1\,000\displaystyle\int_p^q g(x)\,\mathrm{d}x$, où g est la fonction définie dans la **partie B**, représente la somme des revenus annuels des individus dont le revenu annuel, en millions de francs, est compris entre p et q.
   a. Déterminer la somme des revenus annuels des individus dont le revenu annuel est compris entre 2 et 2,5 millions de francs.
   b. Calculer le revenu annuel moyen d'un individu de ce groupe.