∽ Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau ∽ septembre 1995

EXERCICE 1 **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(3 ; 2 ; −1) et H(1 ; −1 ; 3).

1. Calculer la longueur AH.
2. Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH).
3. On donne les points : B(−6 ; 1 ; 1), C(4 ; −3 ; 3) et D(−1 ; −5 ; −1).
   a. Démontrer que les points B, C et D appartiennent au plan (P).
   b. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
   c. Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
   d. Démontrer que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\dfrac{145}{3}$.
4. **a.** Calculer l'aire du triangle ABC.
   b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

PROBLÈME **points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & \dfrac{3}{2} \\ f(x) & = & 2x\ln x - \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{3}{2} \quad \text{pour } x > 0 \end{array}\right.$$

(ln désigne le logarithme népérien). Soit $\mathscr{C}$ sa courbe seprésentative dans un repère orthogonal.

Première partie : Étude d'une fonction auxiliaire et de ses zéros

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2\ln x - x + 1.$$

1. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.
   Étudier les variations de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ deux solutions 1 et α.
   En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. À l'ade de la calculatrice vérifier fque :

$$3{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 4.$$

Deuxième partie : Étude de f

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f' = g$. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   a. Montrer que f est continue en zéro.

b. Calculer la limite de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers zéro par valeur strictement positives.

Que peut-on en conclure ?

2. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ deux solutions 1 et β.

b. Justifier les inégalités : $5 \leqslant \beta \leqslant 6$.

3. La tangente (D) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 5 a pour équation $y = h(x)$.

a. Calculer $h(x)$ et étudier les variations de la fonction Δ définie sur $]5~;~+\infty[$ par :

$$\Delta(x) = f(x) - h(x).$$

En déduire que pour $x \geqslant 5$ on a $f(x) \leqslant h(x)$.

b. Soit γ le point d'intersection de (D) et de l'axe Ox. Calculer γ et prouver que $\beta \leqslant \gamma$.

4. Rassembler dans un tableau les résultats obtenus sur f. Tracer la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal d'unité 2 centimètres.