Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Sportifs de haut-niveau ∽ septembre 1992

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la suite u de premier terme $u_0 = 0$ et définie pour tout entier positif par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_n}.$$

1. **a.** Montrer que pour tout entier n strictement positif on a l'encadrement :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

   b. Étudier le sens de variation de la suite u et en déduire que la suite u est convergente.

   c. Déterminer la limite a de la suite u.

2. **a.** Montrer que pour tout nombre x de l'intervalle $[0~;~u]$, on a :

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

   b. Montrer alors que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

   c. Retrouver ainsi la limite a de la suite u.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan orienté on considère un cercle (C) de centre O et de rayon 1,5 et un cercle (C') de centre O'et de rayon 3. On suppose de plus que la distance de O à O$'$ est égale à 6.

Faire une figure (unité graphique : 1 cm).

1. On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MO'}{MO} = 2$.

   a. Montrer que si I est le centre d'une similitude directe qui transforme (C) en (C') alors I est un point de (Γ).

   b. Montrer que (Γ) coupe la droite (OO$'$) en deux points A et B que l'on caractérisera comme barycentres des points O et O$'$.

   c. Montrer que M est élément de (r) si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
   Déterminer (Γ) et le représenter sur la figure.

2. On veut prouver l'existence et l'unicité d'une similitude directe f d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme (C) en (C').

   a. Dans cette question on admet l'existence de $f\cdot$
   Quelle est alors l'image de O par f et quel est le rapport de f ?
   Soit T le point d'intersection de (C) avec le segment [OO$'$].
   Déterminer l'image T' de T par $f\cdot$

b. En déduire l'existence et l'unicité de f ; construire le centre de f (on expliquera la construction).

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1~;~4[$ par :

$$f(x) = 2\ln\frac{4(x+1)}{4-x}.$$

(ln désigne le logarithme népérien).

Dans la partie A *on étudie la fonction f et on calcule l'intégrale* :

$$J = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans les parties B *et* C *on étudie deux méthodes d'approximation de J. La partie* C *est indépendante de la partie* B.

A.

1. Montrer que l'on a pour tout nombre x de l'intervalle $]-1~;~4[$:

$$f(x) = 2\ln(x+1) - 2\ln(4-x) + 4\ln 2.$$

Déterminer les limites de f en -1 et 4 et étudier les variations de f.

2. Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthogonal d'unités 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

3. a. Calculer $F(x) = \displaystyle\int_1^x 2\ln t\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

b. On considère sur l'intervalle $]-1~;~4[$ les fonctions h et H définies par

$$\begin{aligned} h(x) &= 2\ln(x+1) - 2\ln(4-x)\\ H(x) &= F(x+1) + F(4-x) \end{aligned}$$

Montrer que H est une primitive de h sur $]-1~;~4[$.

c. Calculer la valeur exacte de J.

B. Soit P le polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels.

1. Déterminer a, b et c pour que :

$$P(0) = f(0),\ P(1) = f(1) \quad \text{et}\ P(2) = f(2).$$

2. On prend désormais : $P(x) = (-5\ln 2 + 3\ln 3)x^2 + (11\ln 2 - 5\ln 3)x$.

Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Calculer $|J - I|$. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient : $\dfrac{|J-I|}{J}$.

C.

1. On note (T) la tangente à (C) au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

Déterminer une équation de (T) sous la forme $y = t(x)$. Placer (T) sur la figure.

2. On pose $g(x) = f(x) - \frac{8}{5}x + \frac{12}{5} - 4\ln 2$ pour x appartenant à $]-1\,;\,4[$.

a. Étudier le signe de la dérivée de g.

b. Étudier le signe de g. Interpréter géométriquement ce signe.

c. Calculer

$$K = \int_0^2 t(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donner une interprétation géométrique de la valeur $|J-K|$.
Donner à l'aide de la calculatrice une valeur décimale approchée à 10^{-3} près du quotient : $\frac{|J-K|}{J}$.